الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية مفدي زكرياء – الأزهرية
إمتحانات بكالوريا تجريبية

الشعبة : علـوم تـجريبية
دورة مـاي 2021

إختبارفي مادة: الرياضيات

المـدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعـين التــاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=-3$ و من أجل كلّ كلّ عدد طبيعي n ؛
$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+3n-1$.

1/ أ) أحسب u_1,u_2,u_3 .

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 3$ ؛ $u_n>0$.

ج) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 4$ ؛ $u_n>3n-4$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2/ لتكن المتتالية العددية (v_n) من أجل كلّ عدد طبيعي ؛ $v_n=u_n-9n+30$.

أ) برهن أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

3/ أ) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1+1}\times e^{v_2+2}\times\cdots\times e^{v_n+n}$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم 0 و كريتان حمروان تحملان الرقم 5 و كرية بيضاء تحمل الرقم α (α عدد طبيعي يختلف عن 5 و 10) ، سحب لاعب ثلاث كريات في آن واحد (الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس) .

1/ أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : اللاعب يسحب ثلاث كريات من نفس اللون .

B : اللاعب يسحب ثلاث كريات من ألوان مختلفة .

C : اللاعب يسحب كريتين من نفس اللون .

2/ اللاعب يربح مجموع الأعداد المسجلة على الكريات الثلاثة ، نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب ثلاث كريات الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب .

أ) عيّن قيم X و بيّن أنّ $P(X=\alpha)=\frac{3}{20}$.

ب) عيّن قانون إحتمال X .

ج) أحسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثمّ عيّن قيمة α حتى يربح اللاعب 20 دينارا .

التمرين الثالث: (04 نقطة)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=iz_A$ ، و $z_C=\overline{z_A}$.

1/ أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الجبري و الأسي .

2/ أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\cdots(E)\quad \frac{1+i-z}{-1+i-z}=2e^{i\pi}$.

ب) استنتج أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بالتشابه S الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω (z_Ω هو حل المعادلة (E)) يطلب تعيين نسبته و زاويته .

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما .

4/ أ) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}$ ، لما k يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

ب) عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث ؛ $\arg\left[\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2\pi k$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة : $f(x)=x+\ln|e^x-1|$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1/ أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ، فسّر النتيجتين بيانيا .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x)=\frac{2e^x-1}{e^x-1}$.

ب) أدرس إتجاه تغير f و شكّل جدل تغيراتها .

3/ أ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=2x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)$.

ج) استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') عند $+\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

د) حدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

هـ) عيّن معادلة المماس (T) لــ (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

4/ أ) برهن انّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4<\alpha<0.5$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.

ب) أثبت أنّ α يحقق : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$ ، ثمّ أبشئ كلا من (C_f) ، (Δ) ، (Δ') .

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=|m|x$.

6/ h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $h(x)=-2|x|+\ln\left|1-e^{|x|}\right|$.

أ) تحقق أنّ : $h(x)=f(-|x|)$ ، ثمّ بيّن أنّ h دالة زوجية .

ب) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثمّ أرسمه في نفس المعلم ((C_h) منحنى الدالة h) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقطة)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}$.

1/ أ) أحسب u_1, u_2 ، ثمّ برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $u_n > 1$.

ب) بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) استنتج أنّ (u_n) متقاربة ، ثمّ أحسب نهايتها .

2/ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بــ : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $2v_{n+1} = v_n$.

ب) استنتج أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ج) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n ، ثمّ أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

3/ أحسب بدلالة n المجاميع التالية :

$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$ ، $S'_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \cdots + 2^n v_n$ ، $S''_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \cdots + \ln(v_n)$.

التمرين الثاني: (04 نقطة)

1/ α عدد مركب ، $\overline{\alpha}$ مرافقه ، أثبت أنّ $\alpha + \overline{\alpha} = 0$ معناه α تخيلي صرف .

2/ a عدد مركب يختلف عن 0 ، نرفق بكلّ عدد مركب z يختلف عن a العدد المركب $f(z)$ حيث :
$f(z) = \dfrac{az}{z-a}$.

◁ أثبت أنّ $f(z)$ تخيلي صرف معناه : $|z|^2 \times Re(a) = |a|^2 \times Re(z)$ (Re يرمز إلى الجزء الحقيقي و $|.|$ ترمز إلى الطويلة) .

3/ نضع : $a = -1 + i$.

أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث ؛ $f(z)$ تخيلي صرف .

ب) نعتبر (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(f(z) - a) = \dfrac{9\pi}{4}$.

◁ بيّن أنّ (Δ) هي نصف مستقيم باستثناء النقطة A ذات اللاحقة a ، أكتب معادلته الديكارتية .

4/ أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري ، ثمّ عيّن B نقطة تقاطع (Γ) و (Δ) .

التمرين الثالث: (04 نقطة)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة ، منها n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي ، $n \geq 2$) ، و أربع كريات حمراء تحمل الأعداد $\pi, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$ و كرتين خضراوين تحملان العددين $\dfrac{\pi}{2}$ و $\dfrac{\pi}{3}$ ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق (الكريات لانفرق بينها عند اللمس) .

1 أ) أحسب إحتمال كل من الحدثين A و B حيث ؛ A : سحب كرتين من نفس اللون ، B : سحب كرتين تحملان نفس العدد .

ب) عيّن n حتى يكون $P(A) = \dfrac{17}{55}$.

2 نفرض أنّ $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين ، نعتبر X المتغير العشوائي

الذي يربط بكل نتيجة سحب العدد $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

أ) برر أنّ قيم X هي $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}; 1$.

ب) بيّن أنّ $P(X=0)=\frac{27}{55}$.

ج) عرّف قانون إحتمال X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني و (Γ) المنحنى الذي معادلته $y=\ln x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$.

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{1+(\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$.

3/ أدرس إتجاه تغير f و شكّل جدول تغيراتها .

4/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

5/ أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ) .

II) نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة من المبدأ O ، ليكن a عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$.

1/ برهن أنّ المماس (T_a) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a يمر من المبدأ O معناه $f(a)-af'(a)=0$.

2/ لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

◁ برهن أنّه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ لهما نفس الحلول .

3/ لتكن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(t)=t^3-t^2-t-1$.

أ) أدرس تغيرات الدالة u و شكّل جدول تغيراتها .

ب) بيّن أنّ الدالة u تنعدم مرة واحدة فقط على $\mathbb{R}$.

ج) استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر من المبدأ .

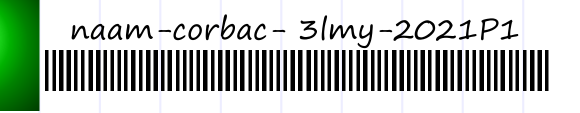
د) أثبت أنّ الحل الوحيد α للمعادلة $u(x)=0$ يحقق : $1.83<\alpha<1.84$.

هـ) استنتج أنّ معادلة المماس (T_{e^α}) المار من المبدأ هي : $y=\left(\frac{1+\alpha^2}{e^\alpha\alpha^2}\right)x$.

III) 1/ أنشئ (C_f) ، (Γ) ، و (T_{e^α}) (يعطى : $\alpha=1.8$ ، $e^\alpha=6.26$) .

2/ m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx$.

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا إن شاء الله



الموضوع الأول

الحل المفصل للبكالوريا التجريبية 2021 شعبة علوم تجريبية

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) $u_1=0, u_2=5, u_3=\frac{34}{3}$.

ب) نضع : $P(n): u_n>0$.

◁ من أجل $n=3$ لدينا $u_3=\frac{34}{3}$ و $\frac{34}{3}>0$ و منه $P(3)$ صحيحة .

◁ نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل $n\geq 3$ و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة $(n\geq 3)$.

$u_n>0$ و $3n-1>0$ و منه $\frac{2}{3}u_n+3n-1>0$ من أجل $n\geq 3$ و منه $u_{n+1}>0$ من أجل كلّ $n\geq 3$ و منه $P(n+1)$ صحيحة $(n\geq 3)$ ، ذن و منه $u_n>0$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 3$.

ج) لدينا $u_n-3n+4=\frac{2}{3}u_n+3$ ، لكن $u_n>0$ و منه $u_n-3n+4>0$ و منه $u_n>3n-4$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 4$ ، لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n-4)=+\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

2/ أ) $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و منه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0=27$.

ب) $v_n=27\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، $u_n=27\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+9n-30$.

3/ أ) $P_n=e^{v_0+v_1+\cdots v_n+1+2+\cdots+n}$ ، $P_n=e^{71\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n(n+1)}{2}}$.

ب) $S_n=(v_0+9\times 0-30)+(v_1+9\times 1-30)+\cdots+(v_n+9\times n-30)$ و منه

$S_n=(v_0+v_1+\cdots+v_n)+9\times(1+2+\cdots+n)-30(n+1)$ و منه

$S_n=71\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{9n(n+1)}{2}-30(n+1)$.

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ $P(A)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$ ، $P(B)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_6^3}=\frac{6}{20}$ ، $P(C)=\frac{C_3^2\times C_3^1+C_2^2\times C_4^1}{20}=\frac{10}{20}$.

2/ أ) $X=\{0,5,10,\alpha,\alpha+5,\alpha+10\}$ ، $P(X=\alpha)=\frac{C_1^1\times C_3^2}{20}=\frac{3}{20}$.

ب)

X	0	5	10	α	$\alpha+5$	$\alpha+10$
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

ج) $E(X)=\frac{30}{20}+\frac{30}{20}+\frac{3\alpha}{20}+\frac{6\alpha+30}{20}+\frac{\alpha+10}{20}=\frac{100+10\alpha}{20}$ ، $E(x)=20$ و منه $\frac{100+10\alpha}{20}=20$ و منه $\alpha=30\text{DA}$

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$.

$z_A=1+i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=1-i$.

2/ أ) $\frac{1+i-z}{-1+i-z}=2e^{i\pi}$ و منه $1+i-z=2-2i+2z$ و منه $3z=3i-1$ و منه $z=-\frac{1}{3}+i$.

ب) لدينا $z_\Omega = -\frac{1}{3} + i$ و يحقق المعادلة (E) أي $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ و منه $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}$ و منه $z_A - z_\Omega = 2e^{i\pi}(z_B - z_\Omega)$ و من A صورة B بالتشابه S الذي مركزه Ω و نسبته $k=2$ و زاويته $\theta = \pi$.

3) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ، $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما و منه $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \pi k$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) > 0$ و منه $\frac{n\pi}{2} = 2\pi k$ ومنه $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}$.

4/ أ) $z - z_C = \sqrt{2}ki$ و منه $\overrightarrow{CM} = k\sqrt{2}\overrightarrow{w}$ حيث : $\overrightarrow{w} = (0,1)$ و منه (Γ_1) هي نصف المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مع $y > -1$ (نصف المستقيم $[CE)$) ، حيث $z_E = 1$.

ب) $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^2 = \pi + 2\pi k$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ومنه $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه (Γ_2) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

حل التمرين الرابع : (08 نقاط)

1/ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

ب) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty$ ، التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f) .

2/ أ) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ أي $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$.

ب) إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	||	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty, -\ln 2[$ ، $]0, +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\ln 2, 0[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\ln 2)$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

3/ أ) لدينا $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x] = 0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) $f(x) = x + \ln\left|e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right|$ و منه $(x) = x + \ln e^x + \ln\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|$ لكن $e^x - 1 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ و منه $\left|1 - \frac{1}{e^x}\right| = \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ و منه $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

ج) لدينا $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = 0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

د) $f(x) = x$ إذن $\ln|e^x - 1| = 0$ و منه $|e^x - 1| = 1$ و منه $e^x - 1 = 1$ أو $e^x - 1 = -1$ و منه $e^x = 2$ أو $e^x = 0$ و منه $x = \ln 2$ ، إذن (C_f) قطع (Δ) في النقطة $(\ln 2, \ln 2)$.

هـ) معادلة (T) هي $y = f'(\ln 2)(x-2) + f(\ln 2)$ ، لدينا $f'(\ln 2) = 3$ و $f(\ln 2) = \ln 2$ و منه $(T) : y = 3x - 2\ln 2$.

4/ أ) f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و خاصة على المجال $[0.4, 0.5]$ و $f(0.4) \times f(0.5) < 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$ أما على المجال $]-\infty, 0[$ المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا لأنّ $f(x) < 0$.

إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

ب) لدينا $f(\alpha) = 0$ و منه $\alpha + \ln|e^{\alpha} - 1| = 0$ و منه $|e^{\alpha} - 1| = e^{-\alpha}$ لكن $\alpha > 0.4$ و منه $e^{\alpha} - 1 > 0$ و منه $e^{\alpha} - 1 = e^{-\alpha}$ و منه $e^{\alpha} - 1 - \dfrac{1}{e^{\alpha}} = 0$ و منه $\dfrac{e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha}} = 0$ و منه $e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 1 = 0$.

الرسم في آخر الورقة .

5/ حلول المعادلة $f(x) = |m|x$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y = |m|x$

هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير m ، من البيان نجد :

إذا كان $|m| \leq 1$ أي $-1 \leq m \leq 1$ فإنّ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا موجبا .

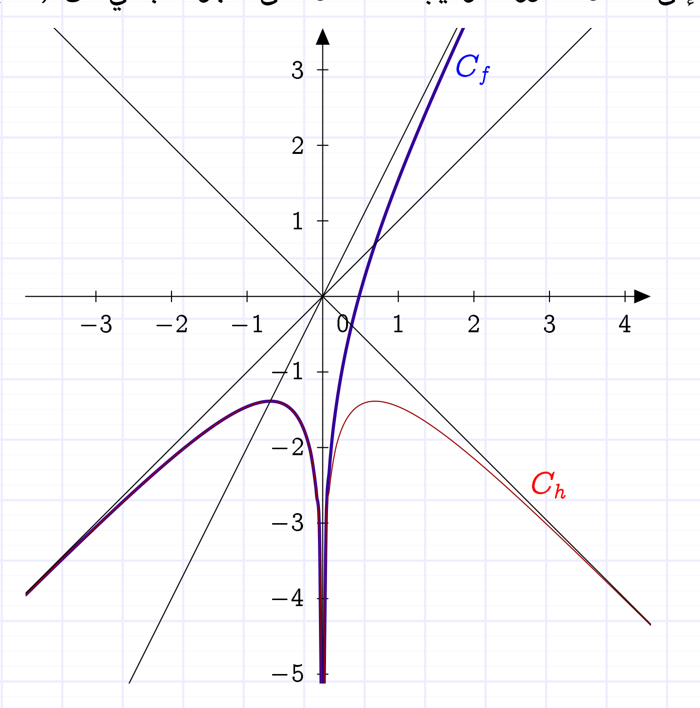
ذا كان $1 < |m| < 2$ أي $m \in]-2, -1[\cup]1, 2[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

إذا كان $|m| \geq 2$ أي $m \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا سالبا .

6/ أ) لدينا $f(-|x|) = -|x| \ln|e^{-|x|} - 1|$ و منه $f(-|x|) = -|x| \ln|e^{-|x|}| \ln|1 - e^{|x|}|$ و من $f(-|x|) = h(x)$.

من أجل كلّ $x \neq 0$ ، $-x \neq 0$ و $h(-x) = f(-|-x|)$ أي $h(x) = f(-|x|)$ لأنّ $|-x| = |x|$ و منه $h(x) = h(-x)$ ، إذن h زوجية .

ب) لدينا من أجل $x \in]-\infty, 0[$ ، $h(x) = f(x)$ و منه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty; 0[$ ، ثمّ نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لنتحصل على الجزء الباقي من (C_h) .



حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) $u_1=\sqrt{5}$ ، $u_2=\sqrt{3}$.

$P(n): u_n>1$.

◁ من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=3$ و $3>1$ و منه $P(0)$ صحيحة .

◁ نفرض أنّ $P(n)$ و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة حيث n عدد طبيعي .

$P(n)$ صحيحة معناه $u_n>1$ و منه $u_n^2>1$ و منه $\frac{1+u_n^2}{2}>\frac{2}{2}$ و منه $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}>1$ و منه $u_{n+1}>1$ ،

إذن $P(n+1)$ صحيحة .

إذن $u_n>1$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ب) $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}$ ، لدينا $1-u_n<0$ و $u_n>0$ و منه

$u_{n+1}-u_n<0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و منه (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) (u_n) محدودة من الأسفل بـ 1 و متناقصة تماما فهي متقاربة نضع : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ، و منه

$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ و منه $\ell=\sqrt{\frac{1+\ell^2}{2}}$ مع $\ell\geq 1$ و منه $\ell^2=\frac{1+\ell^2}{2}$ و منه $\frac{(\ell+1)(\ell-1)}{2}=0$ و منه

$\ell=1$ ، إذن $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

2/ أ) $v_n=u_n^2-1$ ، $2v_{n+1}=2u_{n+1}^2-2=u_n^2-1=v_n$.

ب) $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ و منه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=8$.

ج) $v_n=v_0\times q^n$ و منه $v_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n^2=v_n+1$ و منه $u_n=\sqrt{v_n+1}=\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$ ،

$(u_n>0)$ و منه $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

3/ لدينا $2^n\times v_n=8$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و منه $S'_n=8+8+\cdots+8=8(n+1)$ ،

$S_n=(v_0+1)+(v_1+1)+\cdots+(v_n+1)$ و منه $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n+n+1$ و منه

$S_n=v_0\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+n+1$ و منه $S_n=16\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+n+1$ ، $S''_n=\ln(v_0\times v_1\times\cdots\times v_n)$

و منه $S''_n=\ln\left[(8)^{n+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$.

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ α تخيلي صرف معناه $Re(\alpha)=0$ ، معناه $2Re(\alpha)=0$ معناه $\alpha+\overline{\alpha}=0$ لأنّ $\alpha+\overline{\alpha}=2Re(\alpha)$.

($Re(.)$ يرمز إلى الجزء الحقيقي) .

2/ $f(z)$ تخيلي صرف معناه $f(z)+\overline{f(z)}=0$ و منه $\frac{az}{z-a}+\overline{\left(\frac{az}{z-a}\right)}=0$ و منه $\frac{az}{z-a}+\frac{\overline{az}}{\overline{z}-\overline{a}}=0$

و منه $\frac{az\overline{z}-a\overline{a}z+\overline{a}z\overline{z}-a\overline{a}\overline{z}}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}=0$ و منه $z\overline{z}(a+\overline{a})=a\overline{a}(z+\overline{z})$ لكن $z\overline{z}=|z^2|$ و $a\overline{a}=|a|^2$ و منه

$|z|^2(a+\overline{a})=|a|^2(z+\overline{z})$ لكن $z+\overline{z}=2Re(z)$ و $a\overline{a}=2Re(a)$ معناه :

$|z|^2\times Re(a)=|a|^2\times Re(z)$.

3/ $a=-1+i$.

أ) $f(z)$ تخيلي صرف معناه $|z|^2\times Re(a)=|a|^2\times Re(z)$ ، نضع $z=x+iy$ و منه $(x^2+y^2)\times(-1)=2x$ و منه $x^2+y^2+2x=0$ و منه $(x+1)^2+y^2=1$ و منه (Γ) هي الدائرة التي مركزها $(-1,0)$ و نصف قطرها $r=1$.

ب) لدينا $f(z)-a=\dfrac{a^2}{z-a}$ و منه $\arg(f(z)-a)=\arg\left(\dfrac{a^2}{z-a}\right)=2\arg(a)-\arg(z-a)$ و منه

$\arg(f(z)-a)=\dfrac{9\pi}{4}$ معناه : $2\dfrac{3\pi}{4}-\arg(z-a)=\dfrac{9\pi}{4}$ و منه $\arg(z-a)=-\dfrac{3\pi}{4}$ و منه $(\vec{u},AM)=-\dfrac{3\pi}{4}$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم $]AC)$ حيث $z_C=-2$ معادلته الديكارتية هي $y=x+2$ حيث $x<-1$.

4/ نضع $z=x+iy$ و منه $f(z)=\dfrac{az}{z-a}=\dfrac{az(\overline{z}-\overline{a})}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}$ و منه $f(z)=\dfrac{az\overline{z}-a\overline{a}z}{|z-a|^2}$ ، لدينا $z-a=(x+1)+i(y-1)$ و منه $|z-a|^2=(x+1)^2+(y-1)^2$ و $z\overline{z}=x^2+y^2$ و $a\overline{a}=2$ و منه

$$f(z)=-\frac{x^2+y^2+2x}{(x+1)^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2+y^2-2y}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

لدينا $x^2+y^2+2x=0$ و $y=x+2$ مع $x<-1$ و منه $x^2+3x+2=0$ و $x<-1$ و منه $x=-2$ و $y=0$ ، إذن $B(-2,0)$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ أ) $P(A)=\dfrac{C_n^2+C_4^2+C_2^2}{C_{n+6}^2}=\dfrac{14+n^2-n}{n^2+11n+30}$ ، $P(B)=\dfrac{C_{n+1}^2+C_2^2+C_3^2}{C_{n+6}^2}=\dfrac{10+n^2+n}{n^2+11n+30}$.

ب) $P(A)=\dfrac{17}{55}$ معناه $\dfrac{17}{55}=\dfrac{14+n^2-n}{n^2+11n+30}$ و منه $19n^2-121n+130=0$ حلول هذه المعادلة في $\mathbb{N}$ هي $n=5$.

2/ نفرض أنّ $n=5$.

أ) $\alpha,\beta\in\left\{\pi,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

الجدول الموالي يبيّن القيم الممكنة لـ $\cos\alpha\cos\beta$.

$\cos\beta$ \ $\cos\alpha$	-1	$\frac{1}{2}$	0
-1	1	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
0	0	0	0

.

و منه القيم الممكنة لـ X هي $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},0,1\right\}$.

ب) $P(X=0)=\dfrac{C_3^2+C_3^1\times C_8^1}{C_{11}^2}$ أي $P(X=0)=\dfrac{27}{55}$.

ج)

x	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$P(X=x)$	$\frac{27}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{15}{55}$

.

$E(X)=\dfrac{1-24+60}{220}=\dfrac{37}{220}$.

حل التمرين الرابع : (04 نقاط)

I) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=-\infty$.

2/ f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(\ln)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$.

3/ لدينا $f'(x)>0$ من أجل كلّ x من المجال $]1;+\infty[$ و منه f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

4/ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=0$ و منه (C_f) و (Γ) متقاربان عند $+\infty$.

$f(x)-\ln x=-\frac{1}{\ln x}$ و $-\frac{1}{\ln x}<0$ على المجال $]1;+\infty[$ و منه (C_f) يقع تحت (Γ) على المجال $]1;+\infty[$.

II) 1/ (T_a) معادلته $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ، (T_a) يشمل المبدأ معناه $0=f'(a)(-a)+f(a)$ و منه $f(a)-af'(a)=0$.

2/ $g(x)=0$ معناه $\ln x-\frac{1}{\ln x}+\frac{1+(lnx)^2}{(\ln x)^2}=0$ و منه $\frac{(\ln x)^2-(\ln x)-1-(\ln x)^2}{(\ln x)^2}=0$ و منه $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$.

و منه المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$ لهما نفس الحلول .

3/ أ) $u'(t)=3t^2-2t-1$ و إشارة $u'(t)$ كما يلي :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه u متزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$ و$]1,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{3};1\right[$.

جدول التغيرات :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(t)$	$-\infty$	↗	$f(-\frac{1}{3})$	↘	$f(1)=-1$	↗	$+\infty$

ب) الدالة u مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $0\in]-1;+\infty[$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، أما على المجال $]-\infty;1[$ المعادلة $u(t)=0$ لا تقبل حلا لأنّ $u(t)<0$ و منه u تنعدم مرة واحدة على $\mathbb{R}$.

ج) بوضع $t = \ln x$ تصبح المعادلة $u(t) = 0$ هي $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0$ لها حل وحيد a و منه المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد a أي $f(a) - f'(a)a = 0$ ، إذن يوجد مماس وحيد لـ (C_f) يمر من المبدأ .

د) لدينا $u(1.83) \times u(1.84) < 0$ و منه $1.83 < \alpha < 1.84$.

هـ) لدينا $\ln a = \alpha$ و منه $a = e^{\alpha}$ و منه معادلة المماس (T_a) هي $y = f'(e^{\alpha})x$ أي $y = \left(\dfrac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}\right)x$.

III) 1/ الرسم في أخر الورقة

2/ حلول المعادلة $f(x) = mx$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y = mx$ هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير m ، من البيان نجد :

إذا كان $m > \dfrac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ لا تقبل حلا .

إذا كان $m \leq \dfrac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ تقبل حلا واحدا موجبا .

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا ، التركيز و الثقة في النفس عاملان أساسيان في النجاح

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | مديرية التربيــة لولاية الجلفة
ثانوية زاغز جلول بالإدريسية | المستوى : ثالثة ثانوي علوم تجريبية

يوم : 2020/03/03 | الإمتحان الثاني في مادة : الرياضيات | المدة : 4 ساعات

التمريـن الأول

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كلّ الكرات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس .

1 - نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا وفي آن واحد .

♣ احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

- A : " الكرات المسحوبة كلّها حمراء " .
- B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .
- C : " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .
- D : " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .

2 - ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n \in \mathbb{N}$ مع $n \succeq 2$ ثمّ نسحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع .

♣ نفرض أنّ سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة ، وسحب كرة سوداء يساوي ($+5$) نقطة .

نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصّل عليها .

أ - عيّن قانون الاحتمال لهذا المتغيّر العشوائي X والأمل الرياضياتي $E(X)$.

ب - عيّن قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .

ج - كيف نختار عدد الكرات السّوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

التمريـن الثاني

نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوثيقة المرفقة) .

(I) المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

1 - على الوثيقة المرفقة مثّل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها وموضّحا خطوط الإنشاء) .

2 - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 - برهن بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 2$.

3 - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة . عيّن نهايتها .

(II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$.

1 - برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يّطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

2 - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n . تحقق من نهاية المتتالية (u_n) .

(III) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \frac{u_0}{u_0-2} + \frac{u_1}{u_1-2} + \frac{u_2}{u_2-2} + \dots\dots\dots + \frac{u_n}{u_n-2}$$

التمريـن الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$.

(II) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النّقط A ، B ، C و D ذات اللّواحق $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$ على الترتيب

1 - أ - بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللّاحقة $z_\Omega=3$.

ب - بيّن أنّ : $z_A=\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}+\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}$.

2 - لتكن النّقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O .

أ - عيّن عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث BEC .

ب - استنتج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحوّل E إلى C ثمّ اكتب الصيغة المركبة له .

(III) 1 - عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z التي تحقق : $|iz-3i|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|$.

2 - عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة غير المعدومة z التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$

التمريـن الرابع

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=1+x^2+\ln x$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32\prec\alpha\prec0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=-x+\frac{2+\ln x}{x}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3 - بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ثمّ عيّن حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ واستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

- ادرس الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 - أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعينها . اكتب معادلة المماس (T) .

6 - أنشئ المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) علما أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث : $0.1\prec x_0\prec0.2$ و $1.5\prec x_1\prec1.6$.

بالتوفيق والنّجاح إن شاء الله في شهادة البكالوريا

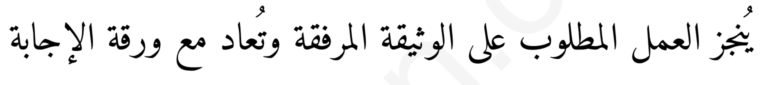
أعظم هندسة في العالم :

بناء جسرٍ من الأمل ... على نهرٍ من اليأس !!

الإســـم واللقب : ....   القســم : ....

الوثيقة المرفقة

(C_f)


يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

....

الإســـم واللقب : ....   القســم : ....

الوثيقة المرفقة

(C_f)

يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربيـة لولاية الجلفة

ثانوية زاغز جلول بالإدريسية — المستوى : ثالثة ثانوي علوم تجريبية

يوم : 2020/03/03 — التصحيح المفصل للامتحان الثاني في مادة : الرياضيات — المدة : 4 ساعات

التمريـن الأول

1 - ♣ حساب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56} \text{ ، } P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56} \text{ ، } P(C)=\frac{C_3^1\cdot C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\frac{46}{56}$$

و $P(D)=\dfrac{C_3^1\cdot C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1}{C_8^3}=\dfrac{45}{56}$.

2 - أ - تعيين قانون الاحتمال لهذا المتغيّر العشوائي X والأمل الرياضياتي $E(X)$:

لنعيّن قيم المتغير العشوائي والتي تحقّق : $x_i\in\{-20;-5;10\}$ مع $i\in\{1;2;3\}$.

لدينا :

$$A_{n+5}^2=\frac{(n+5)!}{(n+5-2)!}=\frac{(n+5)!}{(n+3)!}=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!}=(n+5)(n+4)=n^2+9n+20$$

وعليه :

$$P(X=-20)=\frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}=\frac{20}{n^2+9n+20} \text{ ، } P(X=-5)=\frac{2A_5^1\cdot A_n^1}{A_{n+5}^2}=\frac{10n}{n^2+9n+20}$$

و $P(X=10)=\dfrac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\dfrac{n(n-1)}{n^2+9n+20}$

لنلخّص ذلك في الجدول التالي :

x_i	-20	-5	10
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{n^2+9n+20}$	$\frac{10n}{n^2+9n+20}$	$\frac{n^2-n}{n^2+9n+20}$

تعيين الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=-20\left(\frac{20}{n^2+9n+20}\right)-5\left(\frac{10n}{n^2+9n+20}\right)+10\left(\frac{n^2-n}{n^2+9n+20}\right)=\frac{10n^2-60n-400}{n^2+9n+20}$$

ب - تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة : حتى تكون اللعبة عادلة يكون $E(X)=0$

$E(X)=0$ معناه : $\dfrac{10n^2-60n-400}{n^2+9n+20}=0$ أي : $10n^2-60n-400=0$ معناه $n=10$.

ج - تبيين كيف نختار عدد الكرات السّوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ : لدينا : $E(X)=\dfrac{10(n+4)(n-10)}{n^2+9n+20}$.

حتى تكون اللعبة مربحة يكون : $E(X)\succ 0$ أي $(n-10)\succ 0$ أي $n\succ 10$ لأنّ $\dfrac{10(n+4)}{n^2+9n+20}\succ 0$.

ومنه حتى تكون اللعبة مربحة نأخذ الكرات السوداء أكبر تماما من 10 كرات .

التمريـن الثاني

لدينا :

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{u_n+1}=\frac{3u_n+3-3}{u_n+1}=\frac{3u_n+3}{u_n+1}-\frac{3}{u_n+1}=3\left(\frac{u_n+1}{u_n+1}\right)-\frac{3}{u_n+1}=3-\frac{3}{u_n+1}$$

(I) 1 - التمثيل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (الوثيقة المرفقة) .

2 - وضع التخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها :

من خلال البيان نلاحظ أنّ حدود المتتالية (u_n) تتزايد وبالتالي نُخمّن أنّها متزايدة كما نلاحظ أنّها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المنصف الأول وعليه نُخمّن أنّها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 - البرهان بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 2$:

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ ونعلم أنّ $1 \prec 2$ ومنه $u_0 \prec 2$ وبالتالي الخاصية " $u_n \prec 2$ " محققة من أجل $n = 0$.

- نفرض أنّ $u_n \prec 2$ ونبرهن أنّ $u_{n+1} \prec 2$.

لدينا من الفرض $u_n \prec 2$ بإضافة العدد 1 نجد : $u_n + 1 \prec 3$ بوضع مقلوب الطرفين نجد : $\frac{1}{3} \succ \frac{1}{u_n+1}$ بضرب الطرفين في العدد -3 نجد : $-1 \prec -\frac{3}{u_n+1}$ بإضافة العدد 3 نحصل على : $u_{n+1} \prec 2$.

ومنه من أجل كل n عدد طبيعي فإنّ : $u_n \prec 2$.

ملاحظة مهمّة : هنا يمكنك استعمال الدالة المرفقة للانتقال من u_n إلى u_{n+1} وهو الأفضل .

3 - اثبات أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثمّ استنتاج أنّها متقاربة . تعيين نهايتها :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. نلاحظ من خلال البيان أنّه من كل x من المجال $[0;2[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = x$

ومنه من أجل كل x من المجال $[0;2[$ فإنّ : $f(x) - x \succ 0$.

بما أنّ $0 \preceq u_n \prec 2$ (واضح أنّ $0 \preceq u_n$) فإنّ : $f(u_n) - u_n \succeq 0$ وعليه $u_{n+1} - u_n \succeq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

بما أنّ المتتالية (u_n) ومتزايدة و $u_n \prec 2$ أي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2 .

تعيين النهاية :

بما أنّ المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ مع l عدد حقيقي .

لإيجاد l نضع $l = f(l)$ معناه $l = \frac{3l}{l+1}$ أي $l^2 + l = 3l$ إذن $l^2 - 2l = 0$ وعليه $l(l-2) = 0$ هذا معناه : $l = 2$ أو $l = 0$ وبما أنّ $u_0 = 1$ والمتتالية (u_n) متزايدة فإنّ : $l = 2$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(II) 1 - البرهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدّها الأول :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n+1}} = 1 - \frac{2(u_n+1)}{3u_n} = \frac{3u_n - 2u_n - 2}{3u_n} = \frac{u_n - 2}{3u_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 2}{u_n}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$.

2 - كتابة عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = v_0 q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وكذلك $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ومنه $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ ومنه $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$. -

التحقق من نهاية المتتالية (u_n) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2$ لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ($-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$) .

(III) كتابة بدلالة n المجموع S_n :

لدينا : $\frac{1}{-\frac{1}{(3)^n}} = -(3)^n = \frac{1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1 - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n} - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{\frac{u_n - 2}{u_n}} = \frac{u_n}{u_n - 2}$ وبالتالي :

$$S_n = -(3)^0 - (3)^1 - (3)^2 - \dots - (3)^n = -\left(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n\right) = -\left(\frac{1 - (3)^{n+1}}{1 - 3}\right) = \frac{1 - (3)^{n+1}}{2}$$

التمريـن الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$:

لدينا $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ معناه : $(z^2+3)=0$ أو $(z^2-6z+21)=0$

لنبدأ بالمعادلة الأولى $(z^2+3)=0$ معناه $z^2=-3$ أي $z^2=3i^2$ وعليه $z=i\sqrt{3}$ $z=-i\sqrt{3}$.

الآن نمر إلى المعادلة الثانية $(z^2-6z+21)=0$ نحسب المميز $\Delta=(-6)^2-4(1)(21)=-48=48i^2=\left(4\sqrt{3}i\right)^2$

وعليه حلول المعادلة الثانية هي :
$$\begin{cases} z_1=\dfrac{6-i4\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3} \\ z_2=\dfrac{6+i4\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3} \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ هي : $S=\left\{-i\sqrt{3};i\sqrt{3};3-2i\sqrt{3};3+2i\sqrt{3}\right\}$.

(II) 1 - أ - تبيين أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللّاحقة $z_\Omega=3$:

$$\begin{aligned}
|z_\Omega-z_A|&=\left|3-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right|=\left|3-\sqrt{3}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right|=\left|3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\\
|z_\Omega-z_B|&=\left|3-\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right|=\left|3-\sqrt{3}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\\
|z_\Omega-z_C|&=\left|3-\left(3+2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|3-3-2i\sqrt{3}\right|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}\\
|z_\Omega-z_D|&=\left|3-\left(3-2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|3-3+2i\sqrt{3}\right|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

واضح أنّ : $|z_\Omega-z_A|=|z_\Omega-z_B|=|z_\Omega-z_C|=|z_\Omega-z_D|$ أي : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$.

ومنه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) .

ب - تبيين أنّ : $\left(\dfrac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\dfrac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=z_A$: لدينا :

$$\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=\left(\frac{2-2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1963}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1906}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1963}$$

أي :
$$\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{1906}+\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1963}=e^{-i\frac{1906\pi}{3}}+e^{i\frac{1963\pi}{3}}$$

لدينا :
$$e^{i\left(\frac{-1905\pi-\pi}{3}\right)}+e^{i\left(\frac{1962\pi+\pi}{3}\right)}=e^{-i635\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i654\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه :
$$\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=z_A$$

أ - تعيين عمدة وطويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ ثمّ استنتاج طبيعة المثلث BEC :

E نظيرة D بالنسبة إلى O معناه : $z_E=-z_B=-3+2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا : $\dfrac{BC}{BE}=1=\dfrac{|z_C-z_B|}{|z_E-z_B|}=\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|$ و $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ ومنه المثلث BEC متقايس الأضلاع .

ب - استنتاج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحوّل E إلى C ثمّ كتابة الصيغة المركبة له :

لدينا : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z_E-z_B\right)$ إذن T دوران مركزه النقطة B وزاويته $-\dfrac{\pi}{3}$.

والعبارة المركبة لهذا التحويل هي :

$$z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot z+z_B\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+z_B\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

1 - تعيين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z التي تحقق : $|iz-3i| = |-3+i\sqrt{3}|$:

لدينا : $|iz-3i| = |-3+i\sqrt{3}|$ تكافئ : $|i(x+iy)-3i| = \sqrt{(-3)^2+3}$ تكافئ : $|-y+i(x-3)| = \sqrt{12}$ تكافئ : $(x-3)^2+y^2 = 12$ إذن (E) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(3;0)$ ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$.

2 - تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللّاحقة z غير المعدومة التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$:

لدينا $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \arg(z) - \arg(\bar{z})$ ونعلم أنّ : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ وعليه $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2\arg(z)$ وعليه حتى تكون $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ يكون $\arg(z) = k\pi$ يكافئ : $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = k\pi$ إذن (Γ) هي محور الفواصل باستثناء النقطة O .

التمرين الرابع

(I) 1 - دراسة تغيّرات الدّالة g .

النهايات : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} (1+x^2+\ln x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+x^2+\ln x) = +\infty$.

المشتقة : الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $g(x) \succ 0$ ومنه الدّالة g متزايدة تماما .

جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

2 - تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$:

لدينا $g(0.32) = -0.037$ و $g(0.33) = 0.00023$.

من جدول التغيرات لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.32;0.33[$ و $g(0.32)\times g(0.33) \prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$.

3 - استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(II) 1 - حساب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \left(-x + \frac{2+\ln x}{x}\right) = -\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x + \frac{2+\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ لأنّ : $\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0\right\}$

2 - تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

الدّالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = -1 + \left(\frac{\frac{1}{x}\times x - (2+\ln x)}{x^2}\right) = -1 + \frac{-\ln x - 1}{x^2} = \frac{-x^2-\ln x - 1}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدّالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3 - تبيين أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ثمّ تعيين حصراً للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=-\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha}\cdots(1)$ ولدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $1+\alpha^2+\ln\alpha=0$ ومنه $\ln\alpha=-(1+\alpha^2)$

بالتعويض في (1) نجد :

$$f(\alpha)=-\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha}=-\alpha+\frac{2-(1+\alpha^2)}{\alpha}=-\alpha+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}=-\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha^2}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-2\alpha=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$$

4 - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ واستنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

- دراسة الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : لدينا : $f(x)-y=f(x)+x=\frac{2+\ln x}{x}$

إشارة $f(x)+x$ من إشارة $2+\ln x=0$ لأنّ $x\succ 0$.

لدينا : $f(x)+x=0$ معناه $\frac{2+\ln x}{x}=0$ أي $2+\ln x=0$ معناه $\ln x=-2$ ومنه $x=e^{-2}$.

- لمّا $x\succ e^{-2}$ معناه $\ln x\succ -2$ أي $2+\ln x\succ 0$ ومنه $f(x)-y\succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ) على المجال $]e^{-2};+\infty[$.

- لمّا $x\prec e^{-2}$ معناه $\ln x\prec -2$ أي $2+\ln x\prec 0$ ومنه $f(x)-y\prec 0$ ومنه (C_f) تحت (Δ) على المجال $]0;e^{-2}[$.

- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $(e^{-2};-e^{-2})$ ، $((C_f)\cap(\Delta)=\{(e^{-2};-e^{-2})\})$.

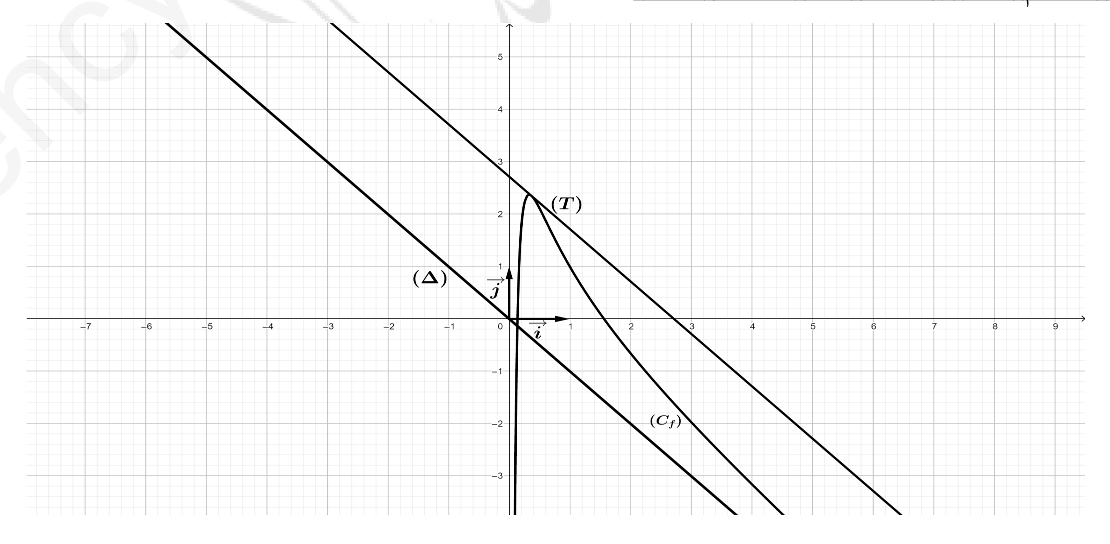
5 - اثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . كتابة معادلة المماس (T) :

نعتبر النقطة $A(x_0;f(x_0))$.

المماس (T) عند النقطة A يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(x_0)=-1$ معناه $-\frac{g(x_0)}{x_0^2}=-1$ أي $g(x_0)=x_0^2$ أي $1+x_0^2+\ln x_0=x_0^2$ ومنه $x_0=e^{-1}$ وعليه إحداثيات النقطة A التي يكون عندها المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) هي $A(e^{-1};e-e^{-1})$.

معادلة المماس (T) : $(T):y_T=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})=-x+e^{-1}+e-e^{-1}=-x+e$

6 - إنشاء المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) :



الوثيقة المرفقة

تُلصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس



الوثيقة المرفقة

تُلصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — الأستاذة: قميري سميرة

الشعبة: علوم تجريبية — دورة ماي 2021

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا

التمرين الأول :

صندوق به 9 كرات لا نفرق بينها عند اللمس، منها أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 . وثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 2، 2 ، 3 وكرتان خضراوان تحملان الرقمين 1 ، 3 . نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع. نسمي الحادثتين: A: الكرة الأولى تحمل الرقم 1   B : الكرات الثلاث من نفس اللون.

1. بين أن $P(A)=\frac{4}{9}$ وأن $P(B)=\frac{5}{84}$
2. احسب $P(A\cap B)$ ثم استنتج $P(A\cup B)$

لاعب يدفع 5 دينارا ثم يسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق السابق دفعة واحدة، إذا كانت الكرات تحمل نفس الرقم يحصل على 10 دينار . وإذا كانت كرتان فقط تحملان نفس الرقم يحصل على 5 دينار وإذا كانت الكرات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى لا يحصل على شيئ (يخسر مادفعه). نسمي X: المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب **قيمة الربح الصافي**

3. بين أن $P(X=0)=\frac{55}{84}$
4. عين قيم المتغير العشوائي X
5. اكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X
6. احسب $E(X)$
7. يعيد شخص هذه اللعبة 2000 مرة بصفة مستقلة. ما هو مجموع الربح المتوقع؟

التمرين الثاني:

(D_1) و (D_2) مستقيمان معرفان بمعادلتيهما $(D_1):\ y=\ln(2)x+\ln\left(\frac{2}{e}\right)$ و $(D_2):y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. احسب فاصلة نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) ثم مثل (D_1) و (D_2) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

المتتالية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)$.

2. مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1<u_{n+1}<u_n$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

4. عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

نضع $\alpha=3$

6. أكتب v_n بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n .

7. احسب نهاية المتتالية (v_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n = u_0 + \frac{u_1}{\ln 2} + \frac{u_2}{(\ln 2)^2} + ... + \frac{u_n}{(\ln 2)^n}$.

8. هل المتتالية (w_n) متقاربة ؟

التمرين الثالث:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{2x} - e^x - x$ ، (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحني (Cf) عند $-\infty$

3) أدرس الوضع النسبي للمنحني (Cf) مع المستقيم (D).

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) حدد إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.

6) بين أن المنحني (Cf) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) يطلب كتابة معادلة له

7) بين أن المنحني (Cf) يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب احداثييها .

8) ارسم (Cf) والمماس (T) والمستقيم (D)

9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $e^x = 1 + me^{-x}$

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

10) اعتمادا على دراستك لاتجاه تغير الدالة f

أ) استنتج –دون حساب– نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g

11) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = e^x\left(\frac{1}{2}e^x - 1\right) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

أ) بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

التمرين الرابع:

المستوي لمركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = -3 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_B = -i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$.

1. بيّن أن $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث ABC

2. احسب لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

3. احسب لاحقة النقطة D صورة النقطة G بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

4. بين أن $\left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right)^{2021} = -1$

5. استنتج أن النقطة A نظيرة النقطة B بالنسبة إلي D .

الأستاذة قمري سميرة

التمرين الأول :

$R1\ ;\ R1\ ;\ R1\ ;\ R2\ ;\ B2\ ;\ B2\ ;\ B3\ ;\ V1\ ;\ V3$

1. إثبات أن: $P(A)=\frac{4}{9}$ وأن $P(B)=\frac{5}{84}$

$P(A)=\frac{A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\frac{4}{9}$ و $P(B)=\frac{A_3^3+A_4^3}{A_9^3}=\frac{5}{84}$

2. حساب $P(A\cap B)$ ثم استنتاج $P(A\cup B)$:

$$P(A\cap B)=\frac{A_3^3}{A_9^3}=\frac{6}{504}=\frac{1}{84}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{31}{63}$$

3. إثبات أن $P(X=0)=\frac{55}{84}$

$$P(X=0)=\frac{C_4^2C_3^1+C_3^2C_6^1+C_2^2C_7^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$$

4. قيم المتغير العشوائي X : $X=\{-5,0,5\}$

5. قانون احتمال المتغير العشوائي X

x_i	-5	0	5
$P(X=x_i)$	$\frac{24}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{5}{84}$

6. حساب $E(X)$: $E(X)=\sum p_ix_i=\frac{-95}{84}$

7. مجموع الربح المتوقع بعد إعادة هذه اللعبة 2000 مرة:

$2000E(X)=-2262$

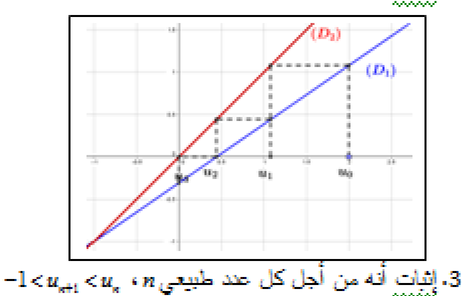
من المتوقع خسارة ما يقارب 2262 دينارا

التمرين الثاني:

1. فاصلة نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) : بحل المعادلة

$3x-4=x$ نجد: $x=2$

2. تمثيل (D_1) و (D_2) والحدود



3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1<u_{n+1}<u_n$ بالتراجع:

أ- لدينا $u_0=2$ و $u_1=\ln(8)-1$

$-1<u_1<u_0$ فالخاصية محققة من أجل 0

ب- نفرض صحة الاستلزام: $-1<u_{n+1}<u_n$ يستلزم $-1<u_{n+2}<u_{n+1}$

$-1<u_{n+1}<u_n$ يستلزم $-\ln(2)<\ln(2)u_{n+1}<\ln(2)u_n$

يستلزم $-\ln(2)+\ln\left(\frac{2}{e}\right)<\ln(2)u_{n+1}+\ln\left(\frac{2}{e}\right)<\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)$

يستلزم $-1<u_{n+2}<u_{n+1}$

استنتاج اتجاه التغير: المتتالية (u_n) متناقصة تماما

4. تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .

$v_{n+1}=3u_{n+1}+\alpha$ يكافئ $v_{n+1}=3\left(\ln(2)u_n+\ln\left(\frac{2}{e}\right)\right)+\alpha$

يكافئ $v_{n+1}=3\ln(2)u_n+3\ln(2)-3+\alpha$

يكافئ $v_{n+1}=\ln(2)\left(3u_n+3-\frac{3-\alpha}{\ln(2)}\right)$

يكفي أن يكون: $3-\frac{3-\alpha}{\ln(2)}=\alpha$ أي $\underline{\alpha=3}$

عبارة الحد العام: $v_n=9(\ln 2)^n$

$$u_n=\frac{1}{3}v_n-1=\frac{1}{3}(9(\ln 2)^n)-1=3(\ln 2)^n-1$$

نهاية المتتالية (v_n) و نهاية المتتالية (u_n)

المتتالية (v_n) هندسية أساسها موجب أصغر من 1 فنهايتها 0

$$\lim u_n=\lim\left(\frac{1}{3}v_n-1\right)=-1$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n،

$w_n=u_0+\frac{u_1}{\ln 2}+\frac{u_2}{(\ln 2)^2}+\ldots+\frac{u_n}{(\ln 2)^n}$.

5. تقارب المتتالية (w_n)

$$w_n=u_0+\frac{u_1}{\ln 2}+\frac{u_2}{(\ln 2)^2}+\ldots+\frac{u_n}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n=\frac{1}{3}v_0-1+\frac{\frac{1}{3}v_1-1}{\ln 2}+\frac{\frac{1}{3}v_2-1}{(\ln 2)^2}+\ldots+\frac{\frac{1}{3}v_n-1}{(\ln 2)^n}$$

$$w_n=\frac{1}{3}(v_0+v_1+\ldots v_n)-1-\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}+\ldots-\frac{1}{(\ln 2)^n}$$

المتتالية (w_n) مجموع متتاليتين متقاربتين فهي متقاربة

التمرين الثالث:

1. حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x-x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x(e^x-1)-x=+\infty$$

2. إثبات أن المستقيم (D) مقارب مائل للمنحنى (Cf) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x))=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x=0$$

3. الوضع النسبي للمنحنى (Cf) مع المستقيم (D)

ندرس إشارة الفرق $e^{2x}-e^x$ حيث $e^{2x}-e^x=e^x(e^x-1)$

$x\in]-\infty,0[$ المنحنى (Cf) تحت المستقيم (D)

المنحنى (Cf) يقطع المستقيم (D) في النقطة التي فاصلتها 0

$x\in]0,+\infty[$ المنحنى (Cf) فوق المستقيم (D)

4. اتجاه تغير الدالة f : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=2e^{2x}-e^x-1=2\left(e^x+\frac{1}{2}\right)(e^x-1)$$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

5. إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$: f موجبة تماما

المماس (T): (T) يوازي المستقيم (D) يعني $f'(x)=-1$

$2e^{2x}-e^x-1=-1$ يكافئ $x=-\ln(2)$

6. معادلة المماس: $y=-x-\frac{1}{4}$

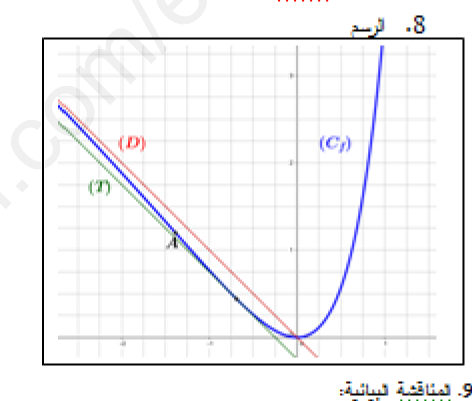
7. نقطة انعطاف المنحنى (C_f): f تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

$$f''(x)=4e^{2x}-e^x=e^x\left(4e^x-1\right)$$

الدالة f'' تنعدم عند $-\ln 4$ وتغير إشارتها فالمنحنى (C_f)

يقبل نقطة انعطاف احداثياها: $A(-\ln 4, e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{4}}+\ln 4)$

8. الرسم



9. المناقشة البيانية:

$e^x=1+me^{-x}$ تكافئ: $e^{2x}=e^x+m$

تكافئ: $e^{2x}-e^x-x=-x+m$

$m\in\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$ المعادلة لا تقبل حلا

$m=-\frac{1}{4}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

$m\in\left]-\frac{1}{4};0\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين

$m\in[0,+\infty[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

10. نهايات الدالة g :

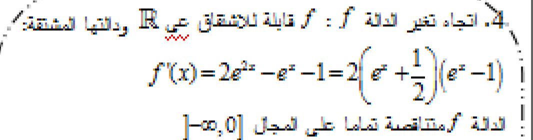
$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\underset{<}{\to}0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\underset{>}{\to}0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\underset{<}{\to}0}g(x)=\lim_{x\underset{<}{\to}0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0}g(x)=\lim_{x\underset{>}{\to}0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 0

12. إثبات أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$. F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$F'(x)=e^{2x}-e^x-x=f(x)$$

اتجاه تغير الدالة F

f موجبة تماما إذن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

التمرين الرابع:

1. إثبات أن $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{-3+3i\sqrt{3}}{3+3i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{-4}$$

$$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

طبيعة المثلث ABC: $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

معناه $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{3}$

أي $AB=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}$ فالمثلث ABC متقايس الأضلاع

2. لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=i\sqrt{3}$$

3. لاحقة النقطة D : $\frac{z_D-z_O}{z_G-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_D=z_Ge^{i\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(i\sqrt{3}\right)=\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

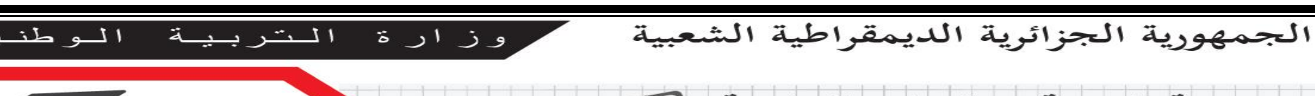
4. إثبات أن: $\left(\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}\right)^{2021}=-1$

$$\left(\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}\right)^{2021}=\left(\frac{-3+2i\sqrt{3}-\left(\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-i\sqrt{3}-\left(\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^{2021}$$

$$=\left(\frac{-3+3i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}\right)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$$

استنتاج: $\frac{z_A-z_D}{z_B-z_D}=-1$ يعني $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{DA}$

إذن النقطة A نظيرة النقطة B بالنسبة إلى D.





المستوى:الثالثة علوم تجريبية	مارس 2022
اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	المدة : ساعتين.

التمرين 1

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x}{x+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

(الشكل في الوثيقة المرفقة)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

1) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء) .

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

4) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

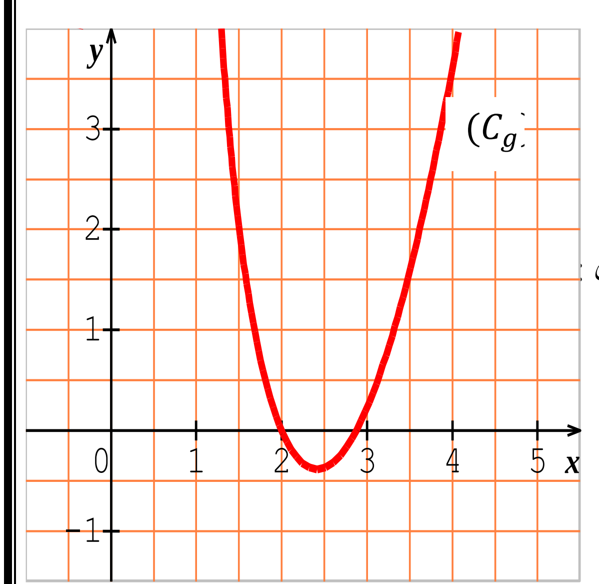
II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 1-\frac{2}{u_n}$

ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{u_0}{u_0-2}+\frac{u_1}{u_1-2}+\cdots+\frac{u_n}{u_n-2}$

التمرين 2



I) لتكن الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين ي الشكل المقابل

1) بقراءة بيانية : عين حلول المعادلة $g(x) = 0$

2) احسب $g(2)$ ، ثم بين ان المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $2.87 < \alpha < 2.88$

3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على$]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x-3+\frac{4\ln(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف ، فسر النتائج هندسيا.

2) ا) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x-3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) ا) بين انه من اجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

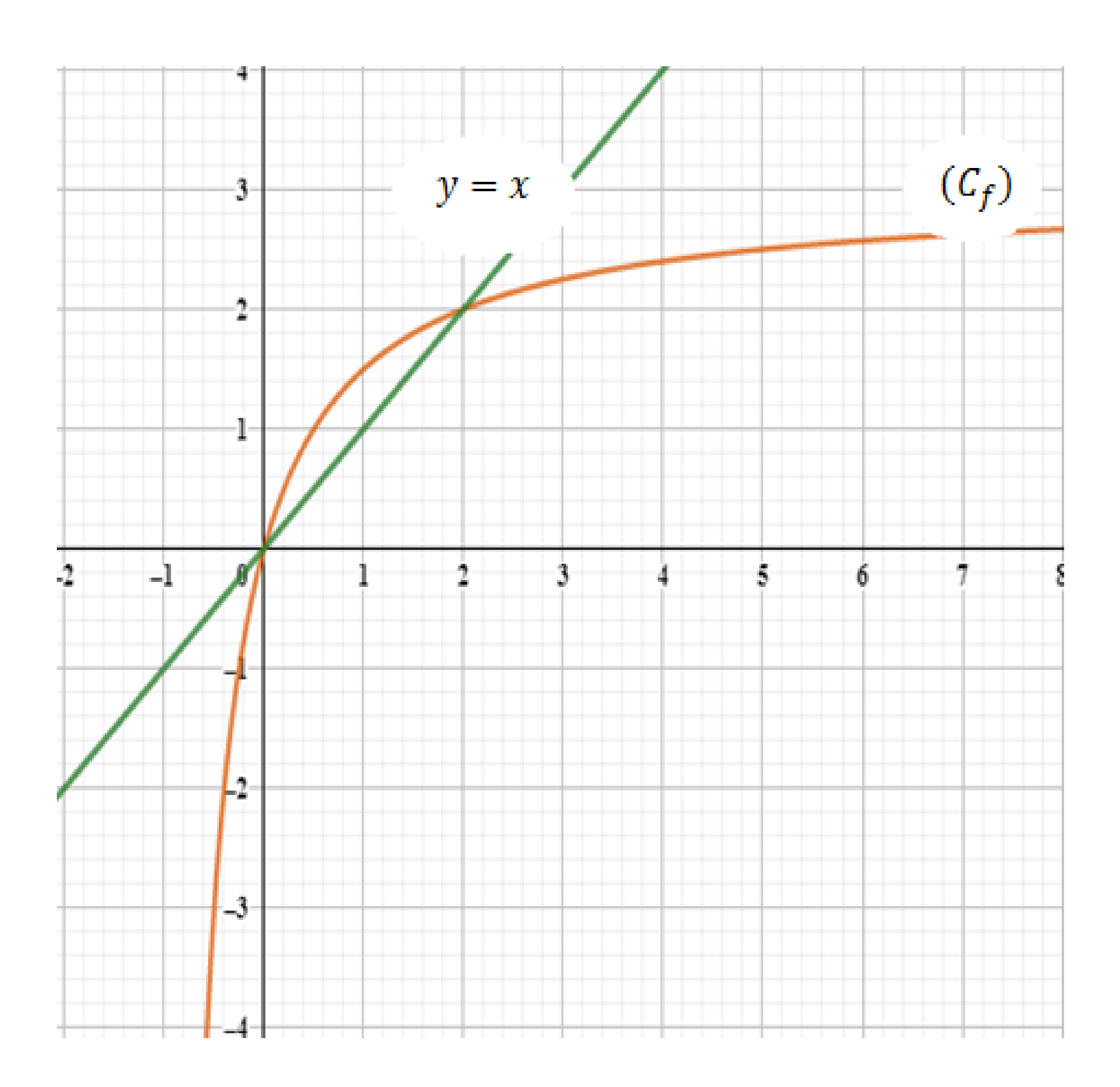
4) ارسم (T) و (C_f).(نأخذ $f(\alpha)$)

5) لتكن الدالة h المعرفة على$]1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)$$

- بين ان الدالة h دالة اصلية للدالة f .

بالتوفيق.



- الوثيقة المرفقة-

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	1) تمثيل على محور الفواصل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 u_0 ،	**التمرين 1**

2) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 2 .

3) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n < 2$

1) من أجل $n = 0$ لدينا :

$u_0 = 1$ و $1 < 2$ و منه : $u_0 < 2$ أي (p_n) صحيحة من أجل $n = 0$.

2) نفرض صحة (p_n) و نبرهن على صحة (p_{n+1}) أي نفرض أن $u_n < 2$ و نبرهن أن $u_{n+1} < 2$

لدينا : $u_n < 2$ و منه $u_n + 1 < 3$ أي $\frac{1}{u_n + 1} > \frac{1}{3}$ أي $\frac{-3}{u_n + 1} < -1$

و منه : $3 - \frac{-3}{u_n + 1} < 3 - 1$ وبالتالي : $u_{n+1} < 2$, إذن : (p_{n+1}) صحيحة .

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n < 2$

4) اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة ، و نهايتها.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{u_n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+2u_n}{u_n+1}=\frac{-u_n(u_n-2)}{u_n+1}$$

لدينا من البرهان بالتراجع : $u_n \prec 2$ أي : $u_n-2 \prec 0$ و $u_n \succ 0$ أي : $-u_n \prec 0$

و منه $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

- بما أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 و متزايدة فإنها متقاربة.

لدينا : $\frac{3\ell}{\ell+1}=\ell$ و منه : $\ell^2+\ell=3\ell$ أي : $\ell^2-2\ell=0$

$\ell=0$ (مرفوض) أو $\ell=2$

و منه $l=2$

ا) نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

لدينا : $v_n=1-\frac{2}{u_n}$ و منه : $v_{n+1}=1-\frac{2}{u_{n+1}}=1-\frac{2}{\frac{3u_n}{u_n+1}}=1-\frac{2u_n+2}{3u_n}=1-\frac{2}{3}-\frac{2}{3u_n}$

و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3u_n}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{u_n}\right)=\frac{1}{3}\times v_n$

$q=\frac{1}{3}$; $v_0=1$

ب) عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n= - (\tfrac{1}{3})^n$$

و

$$u_n=\frac{2}{1-v_n}=\frac{2}{1+(\frac{1}{3})^n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} u_n=2$$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{u_0}{u_0-2}+\frac{u_1}{u_1-2}+\cdots+\frac{u_n}{u_n-2}$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(3)^n$$

التمرين 2

(I

1) بقراءة بيانية للمنحني نجد المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين متمايزين

2) لدينا: $g(2)=0$

$g(2)=0$:

* بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2.87;2.88]$ و <

$g(2.87).g(2.88)$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2.87;2.88[$

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x ملخصة في الجدول التالي:

x	1		2		α		$+\infty$
$g(x)$	||	+	0	-	0	+	

(II

1) $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ: (C_f)

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2-أ) بما أن $\lim_{x \to +\infty} [f(x)-(x-3)]=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب) لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ و الملخصة في الجدول التالي

x	1		$1+e^{-\frac{5}{4}}$		$+\infty$
$f(x)-y$	||	-	0	+	
الوضعية	||	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

3-أ) مهما كان $x \in]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

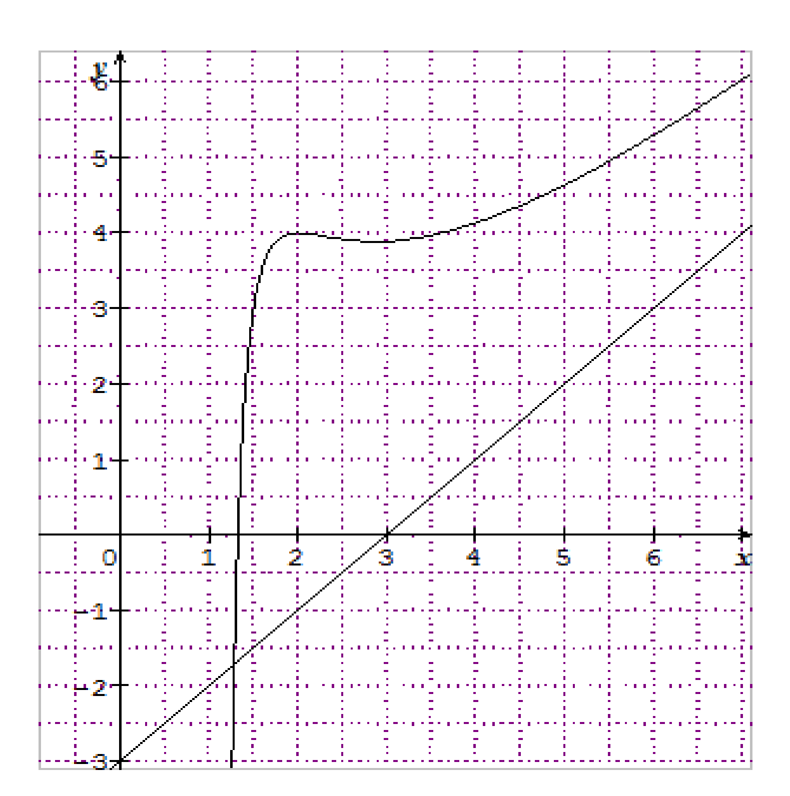
ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

أي أن: f متزيدة تماما على كل من المجالين $]1;2]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[2;\alpha]$

جدول التغيرات

x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) رسم (T) و (C_f).



(5
نبين ان الدالة h دالة اصلية للدالة f .

$h'(x) = f(x)$



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست — البكالوريا التجريبية دورة ماي 2021

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة الرياضيات — المـدة : أربع ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- عين مجموعة الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $(E): 8x-5y=3$

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

- بين أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن: $m\equiv 9[40]$

ج- عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m\equiv 9[40]$

2. ليكن n عددا طبيعيا.

أ- بين أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب-ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 ؟

3. أ- حلل العدد 1998 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998

ب- عين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^2-34d^2=1998$

حيث $d=pgcd\,(a;b)$ و $m=ppcm(a;b)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع (نسحب الكرية الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرية الموالية).

1 أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " الحصول على الكريتين بيضاويين "

B " الحصول على كريتين من نفس اللون "

2 نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرية بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرية سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كريتين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله ألرياضياتي $E(X)$.

ب. عين قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة.

3 نضيف الى الكيس $n-3$ كرية سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

ما هو عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$



التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_1 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. أحسب الحدود u_2 و u_3 و u_4 ثم ضع تخميناَ حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n \le n+3$.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $v_n = u_n - n$.

أ- بين المتتالية (v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أستنتج u_n بدلالة n.

4. نضع : $S_n = \frac{2}{3}v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S_n' = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S_n' ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيداَ α حيث $0,35 < \alpha < 0,36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II - f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$..(الوحدة $2cm$)

1. أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = g(x)$ ثم أستنتج تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
3. أ. برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ب. حدد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0
5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$.

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y\,[17]$.

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k\,;9+24k)$ مع $k\in Z$.

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا وعائيين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء .

نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .

1. نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

أ –بين أن $P(A)=\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$

ب عين النهاية $\lim_{n\to+\infty}P(A)$

2. نعتبر الحادثة B الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . تحقق أن $P(B)=\frac{3}{2(n+3)}$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n\ DA$.

ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n\ DA$

ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئاً

اشرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 .

4. فيما يلي نفرض أن $n>10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح $X=2n-20$

أ –عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي X

ب أحسب أمله ألرياضياتي .

ج– بين أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 .



التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i \end{cases}$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ- أنشئ النقط I و A و B

ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C).

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ- أكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$g(x)=x^2-1+\ln(x)$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.

2. أحسب $g(1)$ ثم أستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$.

II - دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1 يطلب كتابة معادلته .

4. أ- بين أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f)

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $(m+1).x+\ln(x)=0$.

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- تعيين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $(E): 8x-5y=3$

لدينا $8=5+3$ و منه $8(1)-5(1)=3....(F)$ بطرح (F) من (E) نجد أن $8(x-1)=5(y-1)$ و

$pgcd(8;5)=1$ حسب مبرهنة غوص فإن $\begin{cases} x-1=5k \\ y-1=8k \end{cases} : k\in Z$ أي $\begin{cases} x=1+5k \\ y=1+8k \end{cases} : k\in Z$ إذن مجموعة الحلول هي

$S=\{(1+5k;1+8k): k\in Z\}$

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

- إثبات أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن: $m\equiv 9[40]$:

لدينا $8p+1=5q+4$ أي $8p-5q=3$ أي أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E).

$(p;q)=(1+5k;1+8k)$ و منه $m=8p+1=8+40k+1$ أي $m=40k+9$ إذن $m\equiv 9[40]$

ج- تعيين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m\equiv 9[40]$: $m\geq 2000$ أي أن $40k+9\geq 2000$ يعني

أن $k\geq \frac{1991}{40}$ إذن $k\geq 50$ بالتعويض بأصغر عدد لي هو 50 نجد أن $m=40\times 50+9=2009$

2. ليكن n عددا طبيعيا.

أ- إثبات أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$: $2^{3k}\equiv 1[7]$ لدينا $2^3\equiv 1[7]$ بالرفع الى قوى k نجد $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب- باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 : لدينا $1442=3\times 480+2$ و $2^{3\times 480}\equiv 1[7]$ بالضرب في 2^2

نجد $2^{3\times 480+2}\equiv 4[7]$ إذن باقي قسمة 2^{1442} على 7 هو 4 .

3. أ- تحليل العدد 1998 الى جداء عوامل أولية: $1998=2\times 3^3\times 37$

استنتاج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998 : هي 1 و 3

ب- تعيين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^2-34d^2=1998$ حيث $d=pgcd(a;b)$ و

$m=ppcm(a;b)$ لدينا d قاسم للعدد m و منه d^2 قاسم للعدد m^2-34d^2 أي انه قاسم للعدد 1998 إذن

$d^2=1$ أو $d^2=9$ إذن $d=1$ أو $d=3$

لما $d=1$: $m^2=34+1998$ أي $m^2=2032$ و 2032 ليس مربع تام إذن m غير موجودة لأنها عدد طبيعي .

لما $d=3$: $m^2=34\times 9+1998$ أي $m^2=2304$ ومنه $m=48$: $a.b=m.d$ أي أن $a.b=144$ نضع $a=3a'$ و

$b=3b'$ حيث $pgcd(a';b')=1$ و منه نجد $a'b'=16$ يعني أن $(a';b')=(1;16)$ أو $(a';b')=(16;1)$ إذن

$(a;b)=(3;48)$ أو $(a;b)=(48;3)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع (نسحب الكرية الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرية الموالية).

1 حساب احتمال الحوادث التالية : $P(A)=\frac{7^2}{10^2}=\frac{49}{100}$ و $P(B)=\frac{7^2+3^2}{10^2}=\frac{58}{100}$

A " الحصول على الكريتيين بيضاويين "

B " الحصول على كريتيين من نفس اللون "

2 ـنعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرية بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرية سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كريتيين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ. تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	-2α	0	2α
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{49}{100}$

حساب أمله ألرياضياتي $E(X)$: $E(X)=\frac{9}{100}(-2\alpha)+0+\frac{49}{100}(2\alpha)=\frac{80}{100}\alpha=\frac{4}{5}\alpha$

ب. تعيين قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة : يعني أن $E(X)>0$ يكافئ أن $\alpha>0$

3 ـنضيف الى الكيس $n-3$ كرية سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

حساب عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$:

$P(A)=\frac{7^2}{(n+7)^2}=\frac{49}{(n+7)^2}$ و $P(A)=\frac{1}{4}$ بما n عدد طبيعي يعني أن $\frac{49}{(n+7)^2}=\frac{1}{4}$ يكافئ $(n+7)^2=4\times 49$ إذن $(n+7)=2\times 7$ أي أن $n=7$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1. حساب الحدود u_2 و u_3 و u_4 : $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=\frac{4+1+3}{3}=\frac{8}{3}$ و $u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=\frac{16+6+9}{9}=\frac{31}{9}$

و $u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{4}{3}+1=\frac{62+36+27}{27}=\frac{125}{27}$

تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n): المتتالية متزايدة لاحظنا أن $u_1\le u_2\le u_3\le u_4$

2. أ– البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n\le n+3$:

$u_1\le 1+3$ محققة

نفرض أن $u_n\le n+3$ صحيحة و لنبرهن صحة $u_{n+1}\le n+4$

$u_n\le n+3$ يعني أن $\frac{2}{3}u_n\le\frac{2n+6}{3}$ بإضافة $\frac{1}{3}n+1$ نجد $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2n+6+n+3}{3}$ أي أن

$u_{n+1}\le n+3$ إذن $u_{n+1}\le n+4$ صحيحة لأن $n+3\le n+4$

و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n\le n+3$.

ب− إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ لدينا

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n+n+3}{3}$

. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) : بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n\le n+3$ و

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $v_n=u_n-n$.

أ− إثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول : $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1$ أي

$v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$ و منه $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$ أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n-n)$ إذن $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_1=u_1-1=1$

ب− كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

استنتاج u_n بدلالة n : بما أن $u_n=v_n+n$ فإن $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+n$

4. نضع : $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$ و $S_n'=u_1+u_2+...+u_n$.

حساب بدلالة n المجموعين S_n : مجموعة متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{9}$ و حدها الأول $\frac{2}{3}v_1$ إذن

$S_n=\frac{2}{3}v_1\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$ و منه $S_n=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ إذن $S_n=\frac{6}{5}.\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$

$S_n'=u_1+u_2+...+u_n$ تعني أن $S_n'=(v_1+1)+(v_2+2)+...+(v_n+n)$ مجموع متتاليتين حسابية (متتالية الإعداد الطبيعية)

و المتتالية هندسية (v_n) و منه $S_n'=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n(n+1)}{2}$ أي أن $S_n'=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n(n+1)}{2}$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$: $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{5n}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I − الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

1. دراسة تغيرات الدالة g : النهايات $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x^2e^{-x})=1$ و $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^2e^{-x})=-\infty$

المشتقة $g'(x)=(-2x+2)e^{-x}+(x^2-2x+2)e^{-x}$ أي $g'(x)=(x^2-4x+4)e^{-x}$ إذن

$g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$ موجبة و تنعدم عند 2

جدول تغيرات

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ 1

2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $0,35<\alpha<0,36$ لدينا ; $g(0,35)=-0,002$
$g(0,36)=0,016$ و بما الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة السابقة تقبل حل وحيد α

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ موجبة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و سالبة على المجال $]-\infty;\alpha]$

III – f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

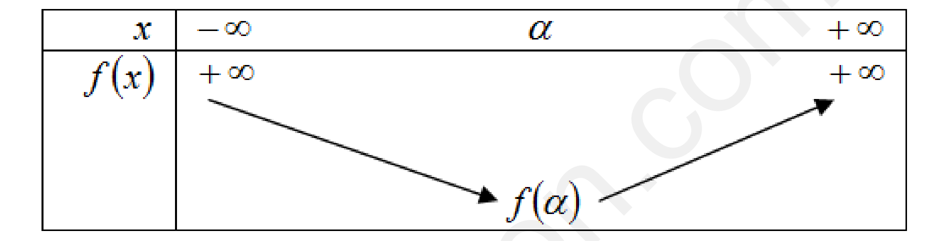
و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ..(الوحدة $2cm$)

1. حساب النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x+x^2e^{-x}]=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x.[1+xe^{-x}]=+\infty$.

2. اثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x)=g(x)$: $f'(x)=1+2x.e^{-x}-(x^2+2)e^{-x}$ ومنه
$f'(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$ إذن $f'(x)=g(x)$

استنتج تغيرات الدالة f : f متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha]$

جدول تغيرات:



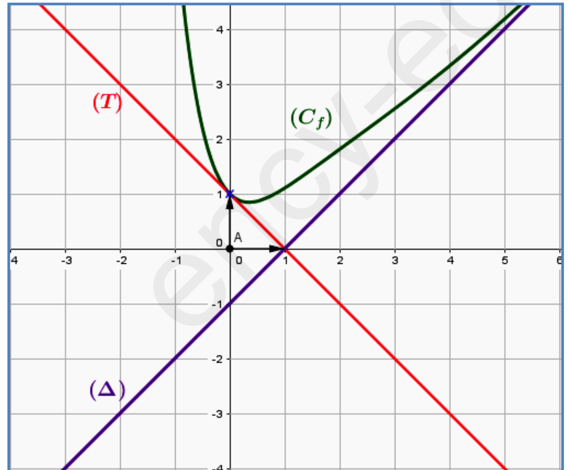
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3. أ. البرهان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}=0$ و منه محققة

ب. تحديد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ): $[f(x)-y]=(x^2+2)e^{-x}$ الفرق موجب تماماً و منه (C) يقع فوق المستقيم (Δ)

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=f'(0)x+f(0)$ أي $y=-x+1$

5. أنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C):



انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ لدينا $2^2\equiv 1[3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n}\equiv 1[3]$ و منه $2^{2n}-1\equiv 0[3]$ و منه صحيحة.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2-x\equiv$	0	0	2	0	0	2	$[6]$

و منه خاطئة

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y[17]$.

$x^2\equiv y^2[17]$ يعني إن $x^2-y^2\equiv 0[17]$ يكافئ أن x^2-y^2 مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ إذن 17 قاسم $(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x\equiv y[17]$ أو $x\equiv -y[17]$ و منه خاطئة .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k;9+24k)$ مع $k\in Z$: $12(4+10k)-5(9+24)=12\times 4+120k-5\times 9-120k$ و منه $12(4+10k)-5(9+24)=3$ إذن محققة و منه صحيحة

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M\equiv 0[27]$ أي أن $100a+10b+c\equiv 0[27]$ أي أن

$M-N\equiv -N[27]$ أي أن $M-N\equiv -100b-10c-a[27]$ أي

$M-N\equiv -a-100b-10c[27]$ و $-999\equiv 0[27]$ أي أن و منه $M-N\equiv -1000a-100b-10c[27]$ أي

$M-N\equiv -10(100a+10b+c)[27]$ أي أن $M-N\equiv -10M[27]$ و $M\equiv 0[27]$ إذن $M-N\equiv 0[27]$ صحيحة.

التمرين الثاني: (04 نقاط) :

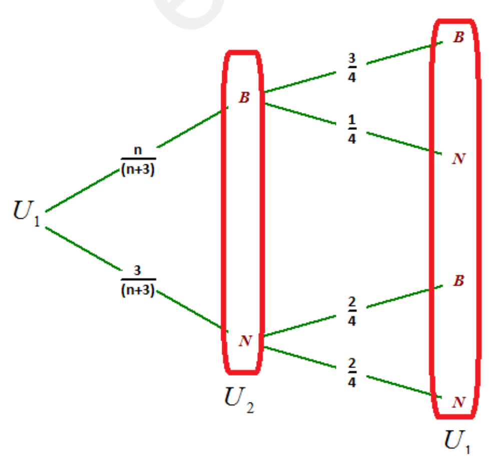
لدينا وعائيين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء .

نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .

1. نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

أ –إثبات أن $P(A)=\dfrac{3(n+2)}{4(n+3)}$

الحادثة A هي أن نسحب كرة بيضاء من الوعاء U_1 و نضعها في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها في الوعاء U_1 أو نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها



في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة سوداء و نضعها في الوعاء U_1

من الشجرة $P(A)=\frac{n}{n+3}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}=\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$

ب–تعيين النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A)$: $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A)=\frac{3}{4}$

2. نعتبر الحادثة B الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . التحقق أن $P(B)=\frac{3}{2(n+3)}$:

الحادثة B هي : أن نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها في الوعاء U_1 :

من الشجرة $P(B)=\frac{3}{n+3}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{2(n+3)}$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n\ DA$.

ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n\ DA$

ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئاً

شرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 :

اللاعب:

يأخذ $2n\ DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $2n-20$ يكون رابح إذا كانت $n>10$

أو يأخذ $n\,DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $n-20$ يكون رابح إذا كانت $n>20$

أو يأخذ إما $0\,DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو -20 هنا هو خاسر

إذن إذا كان n اصغر من 10 فإن اللاعب خاسر في الحالات الثالثة المذكور أعلاه

4. فيما يلي نفرض أن $n>10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح $X=2n-20$

أ –تعيين قانون الاحتمال المتغير العشوائية X

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$	$\frac{n}{4(n+3)}$

ب حساب أمله الرياضياتي : $E(X)=\frac{6(2n-20)+3(n-20)(n+2)-20n}{4(n+3)}=\frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}$

ج– إثبات أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 : اللعبة رابحة يعني أن $E(X)>0$

أي أن $3n^2-62n-240>0$ نحسب مميز كثير الحدود $3n^2-62n-240$ نجده $\Delta=6724=82^2$ إذن الجذران هما

$-\frac{10}{3}$ و 24 ومنه $E(X)>0$ لما $n\geq 25$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$ يكافئ أن $2\overline{\alpha}-\alpha=1+6i$ بوضع $\alpha=x+iy$

نجد $x-3iy=1+6i$ و منه $\begin{cases}x=1\\ -3y=6\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ و منه $\alpha=1-2i$ بالتعويض في معادلة من معادلتي

الجملة نجد $1-2i+\beta=-1$ إذن $\beta=-2+2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب

$z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ–أنشاء النقط I و A و B

ب–تعيين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي أن

$$z_w=\frac{z_A+z_B}{2}=-\frac{1}{2}$$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$

كتابة z_D على شكل الجبري :

$$z_D=\frac{3+9i}{4+2i}=\frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\frac{30+30i}{20}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C):

$|z_D-z_w|=\left|\frac{4}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\frac{5}{2}$ و $|z_A-z_w|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}$ و منه محققة

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث

$$z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$$

أ– كتابة العدد $z_E+\frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ يعني

أن $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن

$z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

ب استنتاج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$: لدينا $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و منه

$$z_E=\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

ا – g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$g(x)=x^2-1+\ln(x)$.

1. دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left[x^2-1+\ln(x)\right]=-\infty$

المشتقة : $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة g متزايدة على $]0;+\infty[$

2. حساب : $g(1)=1^2-1+\ln(1)=0$

استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$: بما أن الدالة g متزايدة على $]0;+\infty[$ و تنعدم عند 1 فإن $g(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$.

II – f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

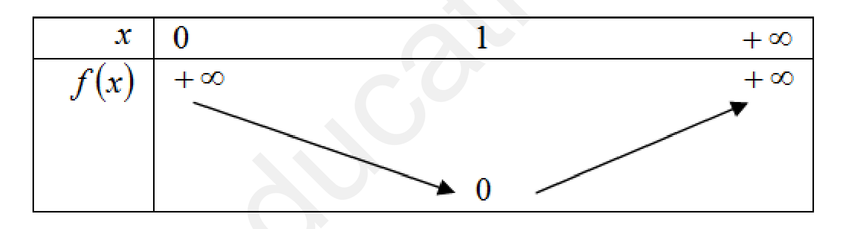
1. حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ بالتزايد المقارن.

2. إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$:

$f'(x)=1-\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right).x-\ln(x)}{x^2}$ و منه $f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ محققة

جدول تغيرات الدالة f :



x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3. إثبات أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1 : $f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{g(x)}{x^2}=1$ يعني أن $g(x)=x^2$ يكافئ أن $\ln(x)=1$ يكافئ أن $x=e$

معادلته $y=(x-e)+f(e)$ أي أن $y=x-1-\dfrac{1}{e}$ هي المعادلة المطلوبة

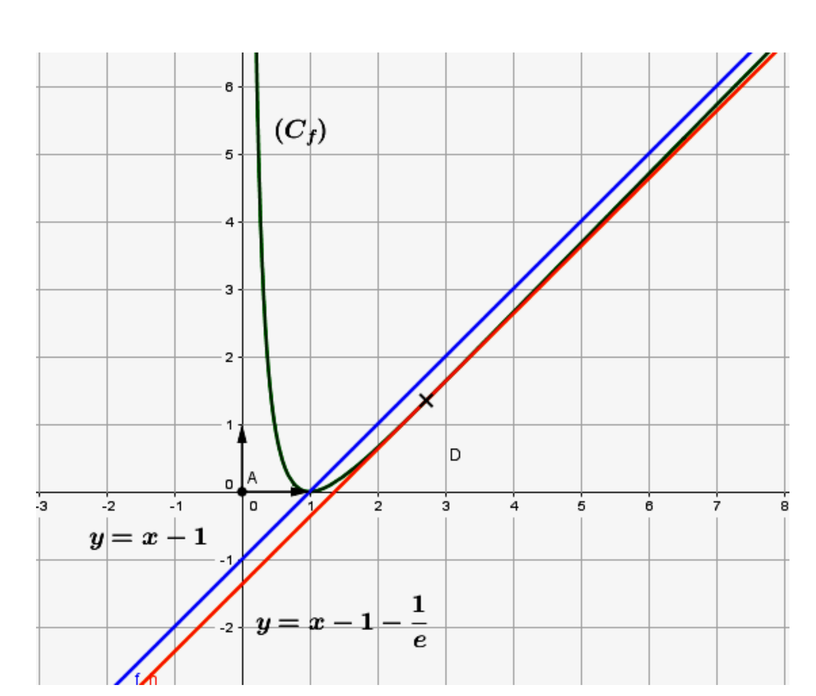
4. أ– إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f) :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{\ln(x)}{x}\right]=0$ و منه محققة

ب– درس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-y\right]=\left[-\dfrac{\ln(x)}{x}\right]$

و هو موجب على المجال على المجال $]0;1[$ إي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .

و سالب على المجال على المجال $]1;+\infty[$ إي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.



5. إنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

6. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $(m+1).x+\ln(x)=0$.

$(m+1).x+\ln(x)=0$ يكافئ

$(m+1)+\frac{\ln(x)}{x}=0$ و منه $m=-1-\frac{\ln(x)}{x}$

بإضافة x نجد $x+m=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$ و منه

$x+m=f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط

تقاطع (C_f) مع المستقيم $(\Delta_m):y=x+m$

لما $m\in\left]-\infty;-1-\frac{1}{e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=-1-\frac{1}{e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left]-1-\frac{1}{e};-1\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m\in[-1;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية تيارت

امتحان البكالوريا التجريبي — ثانوية: قاديري خالد - السوقر

الشعبة: علوم تجريبية — ماي 2021

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03 سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول :(5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2 < u_n \leq 3$

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أنها متقاربة

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2}\right)$

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ ،احسب حدها الأول

ب - أكتب v_n بدلالة n ثم بين أن $u_n = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}$ ، احسب $\lim u_n$

4) أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

ب - بين أن: $\left(\frac{u_0 - 1}{u_0 - 2}\right) \times \left(\frac{u_1 - 1}{u_1 - 2}\right) \times \left(\frac{u_2 - 1}{u_2 - 2}\right) \times \dots\dots\dots \times \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 2}\right) = 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

التمرين الثاني :(4 نقاط)

1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $A_n^2 = 30$

2) كيس يحتوي على 6 كريات متماثلة منها 3 كريات سوداء وكريتين خضراوين و كرة حمراء

نسحب عشوائيا من الكيس كريتين على التوالي بدون إرجاع الكرية المسحوبة

نعتبر الحوادث التالية: A (الحصول على كرية واحدة سوداء)

B (الحصول كرية واحدة خضراء)

C (الحصول على كرية سوداء و كرية خضراء)

D (الحصول على الأقل على كرية سوداء)

بين ان احتمال الحادثة A هو : $P(A) = \frac{3}{5}$ ، ثم احسب احتمال الحوادث: B ، C ، D

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان على الكريات المسحوبة

عين قيم X ثم عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب الامل الرياضي

التمرين الثالث :(4 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 10z + 50 = 0$

2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب

$z_A = 5+5i$ و $z_B = 5-5i$

أ- علم النقطتين A و B .

ب - أكتب z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسي. و استنتج طبيعة المثلث OAB

ج - بين أن : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2021} - \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1442} = 1 + i$

3) ليكن C مرجح الجملة $\{(A;1) ; (B;-1);(O;1)\}$.

ما هي طبيعة الرباعي $OBAC$ ؟ استنتج z_C لاحقة C. علم النقطة C

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MO}\| = 5\sqrt{2}$

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين (Γ) و انشئها

التمرين الرابع :(7 نقاط)

I) الدالة g معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = (2x+1)e^x - 1$

1) احسب نهايتي g عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ثم ادرس اتجاه تغير g وشكل جدول تغيراتها

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) الدالة f معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = x(1-e^{-x})^2$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2) أ- احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ فسر النتيجة هندسيا

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل (Δ)

3) أ- أثبت أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (e^{-x}-1)g(-x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة ذات الفاصلة 0؟

4) ارسم المنحنى (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$

5) m وسيط حقيقي ، عين قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = mx$ ثلاث حلول

الموضوع الثاني

التمرين الأول :(5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$

1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن: $u_n > \frac{4}{3}n$ ثم احسب نهاية (u_n)

3) لتكن المتتالية (v_n) حيث: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2n + 1$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n$

5) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بحدها الأول $w_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$$

احسب w_1 ، w_2 ، w_3 و w_4 ما تخمينك حول طبيعة المتتالية (w_n)؟

برهن على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 2n - 1$

التمرين الثاني :(4 نقاط)

1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $C_n^3 = 12(n-2)$

2) كيس يحتوي على 9 قريصات متماثلة منها اربع قريصات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلا ث قريصات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 2 و قريصتين سوداوين مرقمتين بـ: 1 ، 2

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قريصات في آن واحد

ونعتبر الحادثتين :

A (الحصول على 3 قريصات من نفس اللون)

B (الحصول على 3 قريصات تحمل نفس الرقم)

أ- بين ان احتمال الحادثة A هو : $P(A) = \frac{5}{84}$

ب - احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية : B ، $A \cap B$ ، $A \cup B$

3)- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الارقام على الكريات المسحوبة

عين قيم X ثم عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي

التمرين الثالث:﴿ 4 نقاط ﴾

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(i\overline{z}-1+i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=-1+i$

أ- أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب - أكتب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC

ج - عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ACDB$ مستطيل

3) اكتب العدد $z_A\times z_C$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي واستنتج قيمتي $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

4) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $\arg(z_A-z)-\arg(z_B-z)=\pi+2k\pi$ و $(k\in\mathbb{Z})$

التمرين الرابع :﴿ 7 نقاط ﴾

نعتبر الدالة f المعرفة على $I=]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\ln(x+1)$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ فسر النتائج بيانيا

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) بين أنه من أجل كل x من I ، $f'(x)=\dfrac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}$

ادرس اتجاه تغير f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) (γ) المنحنى ذو المعادلة $y=\ln x$

أ- تحقق من أن $f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-1}+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$ وماذا تستنتج؟

ج- بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $\dfrac{x+1}{x}>1$ ، واستنتج الوضعية النسبية لـ(C_f) و(γ) على $]1;+\infty[$

4) ارسم (γ)و(C_f)

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{1}{|x+1|-2}+\ln|x+1|$

(C_h)المنحنى الممثل للدالة h في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر للمنحنى(C_h)

ب - بين أنه من أجل كل x من $I=]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، $h(x)=f(x)$

ج- ارسم (C_h) في نفس المعلم

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1) **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $2<u_n\le 3$

من أجل $n=0$ ، $2<u_0\le 3$ محققة

نفرض أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، $2<u_n\le 3$ ونبرهن أن $2<u_{n+1}\le 3$

لدينا $2<u_n\le 3$ تكافئ $-1<-\frac{2}{u_n}\le -\frac{2}{3}$ ومنه $2<u_{n+1}\le 3$

2) **بين أن المتتالية** (u_n) **متناقصة واستنتج أنها متقاربة**

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n}$$

$-u_n^2+3u_n-2=0$ تعني $u_n=2$ أو $u_n=1$

u_n	2	3
$-u_n^2+3u_n-2$	0	—

المتتالية (u_n) متناقصة

الاستنتاج: بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة

3) **أ- بين أن** (v_n) **متتالية حسابية أساسها** $\ln 2$

$$v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-2}\right)=\ln\left(\frac{2u_n-2}{u_n-2}\right)=\ln\left(2\times\frac{u_n-1}{u_n-2}\right)$$

$$v_{n+1}=\ln 2+\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n-2}\right)=\ln 2+v_n$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\ln 2$ وحدها الأول $v_0=\ln 2$

ب - v_n **بدلالة** n $\quad v_n=\ln 2+n\ln 2=(n+1)\ln 2=\ln 2^{n+1}$

لدينا $v_n=\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n-2}\right)$ ومنه $e^{v_n}=\frac{u_n-1}{u_n-2}$

أي $u_ne^{v_n}-2e^{v_n}=u_n-1$ ومنه $u_n=\frac{2e^{v_n}-1}{e^{v_n}-1}$

$$u_n=\frac{2e^{\ln 2^{n+1}}-1}{e^{\ln 2^{n+1}}-1}=\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}$$

$$\lim u_n=\lim\frac{2^{n+1}\left(2-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}=2$$

4) **أ- حساب** S_n **بدلالة** n :

$$S_n=\frac{n+1}{2}(\ln 2+\ln 2^{n+1})=\frac{(n+1)(\ln 2^{n+2})}{2}$$

$$S_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ln 2=\ln 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

ب -

$$T_n=\left(\frac{u_0-1}{u_0-2}\right)\times\left(\frac{u_1-1}{u_1-2}\right)\times\left(\frac{u_2-1}{u_2-2}\right)\times.....\times\left(\frac{u_n-1}{u_n-2}\right)$$

$$T_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times....\times e^{v_n}=e^{S_n}=2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

التمرين الثاني :(4 نقاط)

1) **تعيين قيمة** n **:** $A_n^2=30$ تعني $\frac{n!}{(n-2)!}=30$ ومنه

$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=30$ أي $n(n-1)=30$ أي $n^2-n-30=0$

$n=6$ أو $n=-5\notin\mathbb{N}$

2)

$$P(A)=\frac{2(A_3^1\times A_3^1)}{A_6^2}=\frac{10}{30}=\frac{3}{5}$$

$$P(B)=\frac{2(A_2^1\times A_4^1)}{A_6^2}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

$$P(C)=\frac{2(A_3^1\times A_2^1)}{A_6^2}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

$$P(D)=\frac{2(A_3^1\times A_3^1)+A_3^2}{A_6^2}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$$

3) قيم X هي $\{0;1\}$

قيم X	1	2
الاحتمال	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$

$$E(x)=1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{11}{15}=\frac{26}{15}\simeq 1.73$$

التمرين الثالث :(4 نقاط)

1) $z^2-10z+50=0$

$\Delta=-100=(10i)^2$ ، $z_1=5+5i$ ، $z_2=5-5i$

2) ب - $z_A=5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

المثلث OAB قائم في A ومتساوي الساقين

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2021}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2021}=e^{i\frac{2021\pi}{2}}=e^{i(1010\pi+\frac{\pi}{2})}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1442}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1442}=e^{i\frac{1442\pi}{2}}=e^{i(721\pi)}=e^{i\pi}=-1$$

ومنه $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2021}-\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1442}=1+i$

3) لدينا $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$

أي $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OB}$

وبالتالي الرباعي $OBAC$ متوازي أضلاع

$$z_C=z_C-z_B+z_O=10i$$

4) لدينا $\|\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}\|=\|\overrightarrow{OB}\|=5\sqrt{2}$ أي $A\in(\Gamma)$

لدينا $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MO}\|=5\sqrt{2}$ تعني $\|\overrightarrow{MC}\|=5\sqrt{2}$

(Γ) دائرة مركزها C ونصف قطرها $5\sqrt{2}$

التمرين الرابع :(7 نقاط)

I) 1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2xe^{x}+e^{x}-1\right]=-1$

$g'(x)=(2x+3)e^{x}$

x	$-\infty$ 1.5- 0 $+\infty$
$g'(x)$	− 0 +
$g(x)$	-1 ↘ $-2e^{\frac{-3}{2}}-1$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

2) $g(0)=0$ ، $g(x)<0$ على $]-\infty;0[$ و $g(x)>0$ على $]0;+\infty[$

II) $f(x)=x\left(1-e^{-x}\right)^{2}$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2) أ- $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[xe^{-x}(e^{-x}-2)\right]=0$ ، المستقيم $(\Delta):y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب- $e^{-x}-2\geq 0$ تكافئ $e^{-x}\geq 2$ تكافئ $-x\geq \ln 2$ تكافئ $x\leq -\ln 2$

x	$-\infty$ $-\ln 2$	0	$+\infty$
x	−	− 0	+
$e^{-x}-2$	+ 0	−	−
$f(x)-x$	− 0	+ 0	−
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

3) أ- $f(x)=\left(1-e^{-x}\right)^{2}-2xe^{-x}\left(1-e^{-x}\right)=\left(1-e^{-x}\right)\left[1-e^{-x}-2xe^{-x}\right]$

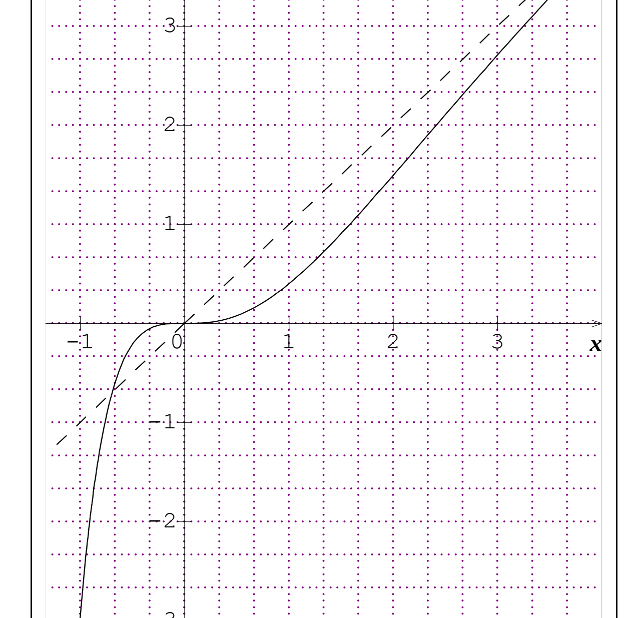
$f'(x)=\left(e^{-x}-1\right)\left[\left(-2x+1\right)e^{-x}-1\right]=\left(e^{-x}-1\right)g(-x)$

ب –

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(-x)$	+	0	−
$e^{-x}-1$	+	0	−
$f'(x)$	+	0	+

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f'(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$

النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة انعطاف



4) رسم المنحنى $\left(C_f\right)$ على المجال $[-1;+\infty[$, $f(-1)\approx -3$

5) حلول المعادلة $f(x)=mx$ هي فواصل نقط تقاطع والمستقيمات المعرفة بالمعادلة $y=mx$

قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=mx$ ثلاث حلول هي $0<m<1$

التمرين الأول :(5 نقاط):1) $u_0=3$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+4n+4}{3}$

$u_1=\frac{7}{3}$ ، $u_2=\frac{31}{9}$ ، $u_3=\frac{139}{27}$

التمرين الثاني :(4 نقاط)

1) تعيين قيمة n : $C_n^3=12(n-2)$ تعني $\frac{n!}{(n-2)!\cdot 3!}=12(n-2)$

2) **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $u_n > 0$

أجل $n=0$ ، $u_0>0$ محققة

نفرض أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n>0$ ونبرهن أن: $u_{n+1}>0$

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n>0$ و $4n+4>0$ ومنه $u_{n+1}>0$

ب – لدينا لكل $n\ge 1$ ، $u_{n-1}>0$ ولدينا $3u_n=u_{n-1}+4(n-1)+4$

تكافئ $u_{n-1}=3u_n-4n$ ومنه $3u_n-4n>0$ أي $u_n>\frac{4}{3}n$

لدينا $\lim \frac{4}{3}n=+\infty$ و $u_n>\frac{4}{3}n$ ومنه $\lim u_n=+\infty$

3) أ- $v_{n+1}=u_{n+1}-2n-1=\frac{u_n+4n+4}{3}-2n-1=\frac{1}{3}v_n$

(v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_n=4$

ب- $v_n=4\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $u_n=v_n+2n-1$ ومنه $u_n=4\left(\frac{1}{3}\right)^n+2n-1$

$$\lim u_n=\lim\left[4\left(\frac{1}{3}\right)^n+2n-1\right]=+\infty$$

4)حساب S_n بدلالة n : لدينا $u_n=v_n+2n-1$

$$S_n=(v_0-1)+(v_1+1)+(v_2+3)+\cdots+(v_n+2n-1)$$

ومنه $S_n=(v_0+v_1+v_2+...+v_n)+\left[-1+1+3+\cdots+(2n-1)\right]$

$$S_n=v_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n+1}{2}\left[-1+(2n-1)\right]$$

$$S_n=v_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n+1}{2}\left[-1+(2n-1)\right]$$

$$S_n=6\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]+n^2-1$$

5) $w_1=1$ ، $w_2=3$ ، $w_3=5$ ، $w_4=7$

التخمين حول طبيعة المتتالية (w_n) **: حسابية أساسها 2**

برهن على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=2n-1$

أجل $n=0$ ، $w_0=-1$ محققة

نفرض أن $w_n=2n-1$ ونبرهن أن: $w_{n+1}=2n+1$

$$w_{n+1}=\frac{(n+2)w_n+3}{n+1}=\frac{(n+2)(2n-1)+3}{n+1}=\frac{2n^2+3n+1}{n+1}$$

$$w_{n+1}=\frac{2n^2+3n+1}{n+1}=\frac{(2n+1)(n+1)}{n+1}=2n+1$$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!\cdot 3!}=12(n-2)$ ومنه $n^2-n-72=0$

أي $\Delta=289=17^2$ ، $n=9$ أو $n=-8\notin\mathbb{N}$

2) $P(A)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$ ، $P(B)=\frac{C_4^3+C_5^3}{C_9^3}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$

$$P(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{2}{84}=\frac{1}{42}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{84}+\frac{14}{84}-\frac{2}{84}=\frac{17}{84}$$

3)- قيم X هي $\{3;4;5:6\}$

$P(x=3)=\frac{C_4^3}{84}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$ ، $P(x=4)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{84}=\frac{30}{84}=\frac{15}{42}$

$P(x=5)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{84}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$ ، $P(x=6)=\frac{C_5^3}{84}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$

قيم X	3	4	5	6
الاحتمال	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

الأمل الرياضياتي $E(x)=\frac{14}{3}\simeq 4.66$

التمرين الثالث:(4 نقاط)

1) حل المعادلة $(i\bar{z}-1+i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

إما $i\bar{z}-1+i=0$ تعني $\bar{z}=\frac{1-i}{i}\times\frac{-i}{-i}=-1-i$

أي $z=-1+i$

أو $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=-4=(2i)^2$ ، $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$

2) أ- $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ب - $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-1-\sqrt{3}}{-2i}\times\frac{i}{i}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i=\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

طبيعة المثلث ABC **: قائم في** A

ج - $ACDB$ مستطيل يعني $z_C-z_A=z_D-z_B$ أي $z_D=-1-i$

3) $z_A\times z_C=(\sqrt{3}+i)(-1+i)=-\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}-1)i$

$$z_A\times z_C=(2e^{i\frac{\pi}{6}})(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$$

$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ و $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

4) $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\pi+2k\pi$ تعني $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=\pi+2k\pi$

مجموعة النقط $M(z)$ هي القطعة المستقيمة $]A;B[$

الموضوع الثاني

التمرين الرابع :(7 نقاط) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\ln(x+1)$

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = -\infty$ **التفسير:** $x = 1$ و $x = -1$ **مستقيمان مقاربان عموديان**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) $$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-x-1+(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}$$

x	-1		0		1		3		$+\infty$
x		−	0	+	‖	+		+	
$x-3$		−		−	‖	−	0	+	
$x+1$		+		+	‖	+	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

f **متزايدة تماما على** $]-1;0]$ **وعلى** $[3;+\infty[$ ، f **متناقصة تماما على** $]1;3]$ **وعلى** $[0;1[$

3) (γ) **المنحنى ذو المعادلة** $y = \ln x$

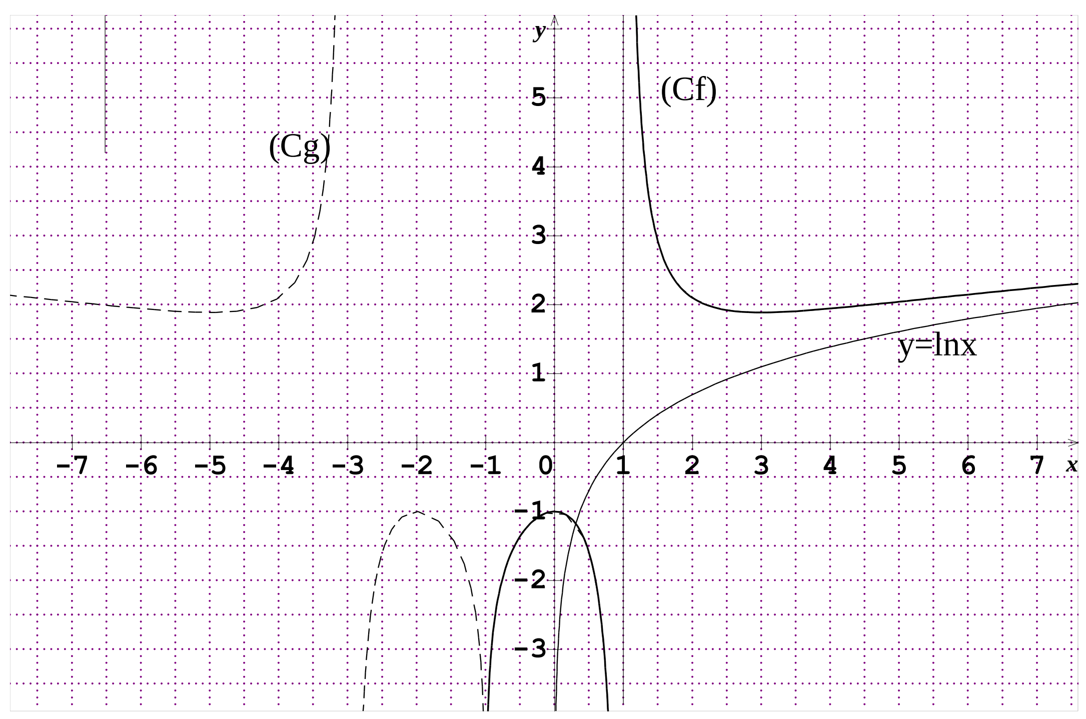
أ- تحقق من أن $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

ب- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$ **وتستنتج أن:** (C_f) **و** (γ) **متقاربان عند** $+\infty$

ج- لدينا من أجل كل x **من** $]1;+\infty[$ ، $x+1 > x$ **ومنه** $\frac{x+1}{x} > 1$ ،

لدينا من أجل كل x **من** $]1;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > 0$ **و** $\frac{1}{x-1} > 0$ **ومنه** $f(x) - \ln x > 0$ **ومنه** (C_f) **فوق** (γ) **على** $]1;+\infty[$

4)



5) أ- $$h(-2-x) = \frac{1}{|-x-1|-2} + \ln|-x-1| = \frac{1}{|x+1|-2} + \ln|x+1| = h(x)$$

ومنه المستقيم (Δ) **ذو المعادلة** $x = -1$ **محور تناظر للمنحنى** (C_h)

ب - لدينا من أجل كل x **من** $I =]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، $|x+1| = x+1$ **ومنه** $h(x) = f(x)$

ج- <u>**رسم**</u> (C_h)**:** **ينطبق على** (C_f) **في المجال** $I =]-1;1[\cup]1;+\infty[$ **و** (C_h) **متناظر بالنسبة للمستقيم** (Δ)

موضوع تجريبي للتدرب رقم 02 مع الحل المفصل

التمرين الأول (المتتاليات العددية) : * 05 نقاط *

في الشكل أدناه المنحني (C_f) يمثل الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{4x-2}{x+1}$.

و المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$.

1) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم (d) .

2) ادرس إتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$ ، ثم بين أنه إذا كان : $x\in[1;2]$ فإن : $f(x)\in[1;2]$.

3) نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_0=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

أ- باستعمال (C_f) و (d) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مظهرا خطوط الإنشاء ، ثم أعط تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1<u_n<2$.

ج- أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq\frac{3}{2}$ و أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(2-u_n)$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2-u_n\leq\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

ج- أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة الحد العام (u_n) بدلالة n و حدد نهايتها من جديد .

6) نضع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\frac{1}{u_0-1}+\frac{1}{u_1-1}+...........+\frac{1}{u_n-1}$.

- عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني (الإحتمالات) : * 04 نقاط *

يحتوي كيس غير شفاف على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام : 0 ، 0 ، 1 ، 2 و أربع كريات خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 و كريتين سوداوين تحملان الرقمين : 1 ، 2 .

(كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع .

- نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " .

B : " الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم " .

C : " الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام المسجلة عليها غير معدوم " .

1) أحسب الإحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$ و $P(C)$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تجربة جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

أ ـ حدد قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب ـ أحسب الإحتمال : $P\left(e^{X^2-X}>1\right)$.

التمرين الثالث (الأعداد المركبة) : * 05 نقاط *

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z^2+4\right)\left(z^2-6z+18\right)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط : A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=-2i$ ، $z_C=3-3i$ و $z_D=3+3i$.

أ ـ ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ أحسب مساحته .

ب ـ بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω يطلب تعيين إحداثييها .

3) أ ـ أكتب العدد z_D على الشكل الأسي ، ثم استنتج الطويلة و عمدة للعدد المركب α إذا علمت أن :

$\alpha\times z_D=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

ب ـ أعط الشكل الجبري للعدد المركب α ، ثم إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

ج ـ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد α^n تخيليا صرفا .

د ـ بين أن العدد $\left(\sqrt{2}\,\alpha\right)^{1440}$ حقيقي .

4) أ ـ نعتبر (Π) هي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg\left(z^2+4\right)=\arg\left(z+2i\right)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

ـ عين طبيعة المجموعة (Π) .

ب ـ لتكن (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\left|z-z_C\right|^2+\left|z-z_D\right|^2=\left|z_D-z_C\right|^2$.

ـ تحقق أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة (C) ، ثم حدد طبيعة هذه الأخيرة .

التمرين الرابع (الدوال اللوغاريتمية) : * 06 نقاط *

I) الدالة g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) احسب نهاية الدالة g عند 0 و عند $+\infty$ ، ثم فسر بيانيا النهاية عند 0 .

2) ادرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3) أ ـ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ تحقق أن : $1{,}83<\alpha<1{,}84$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ ، (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب كلا من : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و فسر النتائج بيانيا .

2) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\times g(x)$.

ب ـ إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ المماس (T) و مثل المنحني (C) .

5) نعتبر المستقيمات (d_m) المعرفة بالمعادلة $y=m^2x-1$ حيث : m وسيط حقيقي .

أ- بين أن جميع المستقيمات (d_m) تمر بنقطة ثابتة يطلب تحديد إحداثييها .

ب- ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=m^2x-1$.

6) الدالة h معرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{2\ln|x|}{x^2+|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني .

أ- بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C) بواسطة تحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه .

ب- مثل (C_h) في نفس المعلم السابق .

(الوثيقة المرفقة بالتمرين الأول) :



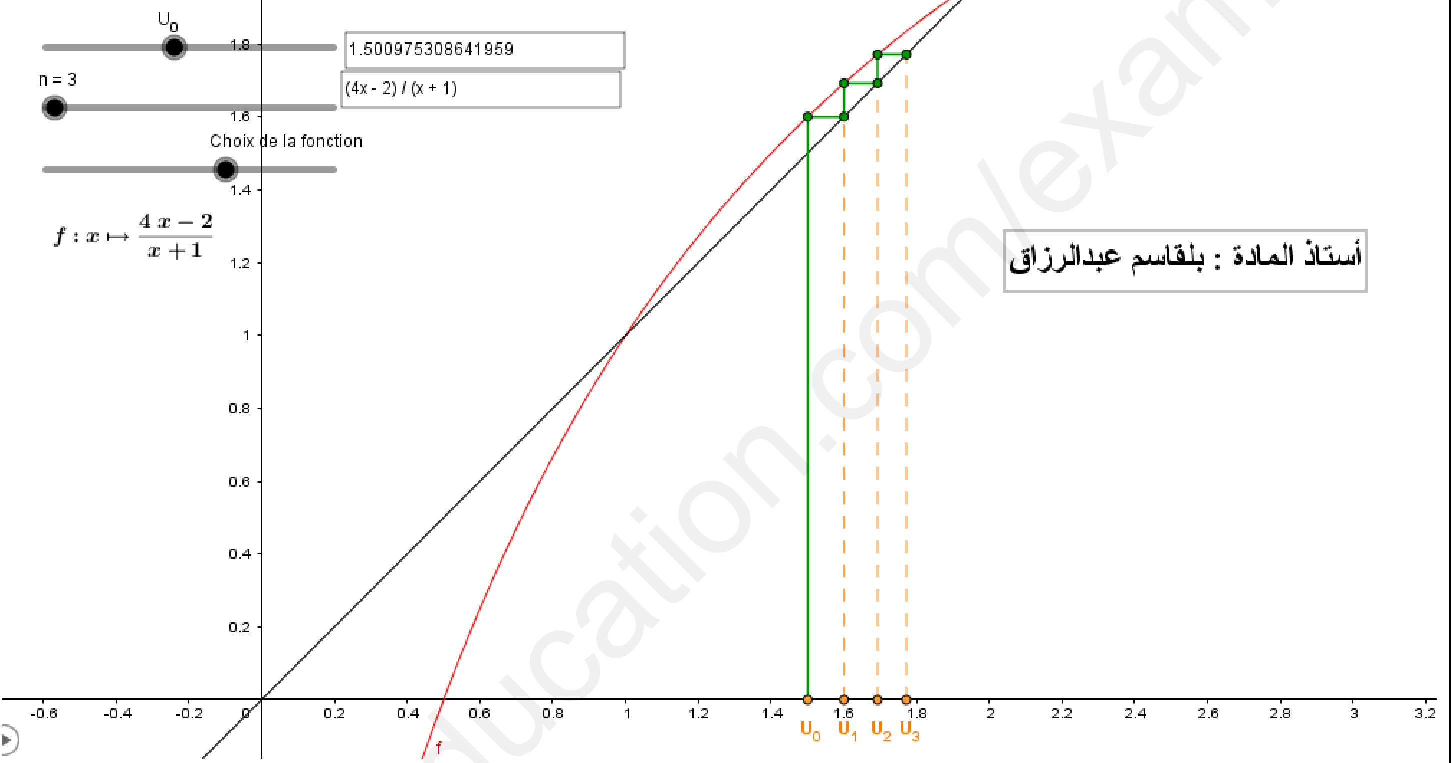
إنتهـــى ـــــــــــــــــــ ك . أ : بلقاسم عبدالرزاق

حل مقترح للتمرين الأول (المتتاليات العددية) :

1) نحل المعادلة $f(x)=x$ أي : $\frac{4x-2}{x+1}=x$ أي نجد : $x^2-3x+2=0$ ، لدينا مجموع المعاملات يساوي 0 و منه :
$x_1=1$ و $x_2=2$ ، إذن : $(C_f)\cap(d)=\{(1;1),(2,2)\}$.

2) لدينا من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ أي : $f'(x)>0$ ، إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.
لدينا : $x\in[1,2]$ أي : $1<x<2$ ، بما أن الدالة f متزايدة على $]-1;+\infty[$ فإن : $f(1)<f(x)<f(2)$ أي نجد :
$1<f(x)<2$ و بالتالي : $\boxed{f(x)\in[1,2]}$.

3) لدينا : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.
أ) الإنشاء و التخمين :



- نلاحظ أن : $u_0<u_1<u_2<u_3$ أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متزايدة .
كما نلاحظ أن الحدود تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (d) أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متقاربة .
ب) نستعمل البرهان بالتراجع لنبين الخاصية : $1<u_n<2$ ..... $P(n)$.
- نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ أي لدينا : $u_0=\frac{3}{2}$ و $1<\frac{3}{2}<2$ و منه : $1<u_0<2$ (محققة) .
- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $1<u_n<2$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $1<u_{n+1}<2$.
لدينا فرضا أن : $1<u_n<2$ و حسب الجواب (2) : بما أن : $u_n\in]1,2[$ فإن : $f(u_n)\in]1,2[$ أي : $1<f(u_n)<2$
و منه : $1<u_{n+1}<2$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{1<u_n<2}$.
ج) أولا نحسب $u_{n+1}-u_n$:
$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\frac{4u_n-2-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+1}$ ، نجد من أجل $1<u_n<2$ فإن : $(-u_n^2+3u_n-2)>0$
و $u_n+1>0$ و منه : يكون : $u_{n+1}-u_n>0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
- بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و $u_0=\frac{3}{2}$ فإنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $u_n\geq\frac{3}{2}$.

- بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

4) أ) لنبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $2-u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2-u_n)$.

نحسب أولا $2-u_{n+1}$: $2-u_{n+1} = 2-\frac{4u_n-2}{u_n+1} = \frac{2u_n+2-4u_n+2}{u_n+1} = \frac{-2u_n+4}{u_n+1}$.

لدينا : $1 < u_n < 2$ و منه : $0 < -2u_n+4 < 2$ إذن يمكن كتابة : $2-u_{n+1} = (-2u_n+4)\times\frac{1}{u_n+1}$.

نعلم أن : $u_n \geq \frac{3}{2}$ أي : $u_n+1 \geq \frac{5}{2}$ أي : $\frac{1}{u_n+1} \leq \frac{2}{5}$ أي : $(-2u_n+4)\frac{1}{u_n+1} \leq \frac{2}{5}(-2u_n+4)$ أي : $\frac{-2u_n+4}{u_n+1} \leq \frac{2}{5}\times 2(-u_n+2)$

و منه : $\frac{-2u_n+4}{u_n+1} \leq \frac{4}{5}(-u_n+2)$ ، إذن : $\boxed{2-u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2-u_n)}$ هو المطلوب.

ب) لنبرهن بالتراجع عن الخاصية : $2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \quad ......P(n)$.

- لنتحقق صحة الخاصية من أجل $n=0$ أي : $2-\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$ أي : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ و منه : $2-u_0 \leq \frac{1}{2}$ (محققة).

- نفرض صحة الخاصية من أجل n كيفي أي : $2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $2-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

لدينا من جهة أن : $2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ أي : $\frac{4}{5}(2-u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{4}{5}$ و منه : $\frac{4}{5}(2-u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

و من جهة أخرى لدينا : $2-u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2-u_n)$ ، إذن : من هذا و ذاك نجد : $2-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

و أخيرا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n}$.

ج) لدينا : $2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ و نعلم أن : $2-u_n > 0$ و بالتالي : $0 < 2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n\to+\infty}(2-u_n) = 0$ و هذا يدل على أن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

5) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$.

أ- لدينا : $\frac{2}{3}\left(\frac{u_n-2}{u_n-1}\right) = \frac{2u_n-4}{3u_n-3} = \frac{\frac{2u_n-4}{u_n+1}}{\frac{3u_n-3}{u_n+1}} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = v_{n+1}$ أي : $v_{n+1} = \frac{2}{3}\times v_n$.

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0-2}{u_0-1} = -1$.

ب- نجد : $\boxed{v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ و لدينا : $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$ أي : $v_n.u_n - v_n = u_n-2$ أي : $v_n.u_n - u_n = v_n-2$ أي : $u_n(v_n-1) = v_n-2$

و منه نجد : $u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1}$ ، إذن : $\boxed{u_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}}$ ، أي : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$ لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

6) لدينا : $S_n=\frac{1}{u_0-1}+\frac{1}{u_1-1}+......+\frac{1}{u_n-1}$.

أي : $u_n=\frac{v_n-2}{v_n-1}$ أي : $u_n-1=\frac{-1}{v_n-1}$ أي : $\frac{1}{u_n-1}=-(v_n-1)$ ، أي : $S_n=-(v_0-1)-(v_1-1)+......-(v_n-1)$

أي : $S_n=-[(v_0-1)+(v_1-1)+......+(v_n-1)]$ أي : $S_n=-[(v_0+v_1+.....+v_n)+(-1-1......-1)]$

و منه : $S_n=-\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-1(n+1)\right]$ أي : $\boxed{S_n=3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+(n+1)}$.

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}$ و منه : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=1}$.

حل مقترح للتمرين الثاني (الإحتمالات) :

1) حساب إحتمال الأحداث :

الحدث A : (V,V,V) أو (R,R,R) أي : $P(A)=\frac{A_4^3+A_4^3}{A_{10}^3}=\frac{2\times24}{720}=\frac{48}{720}$ و منه : $\boxed{P(A)=\frac{1}{15}}$.

الحدث B : $(1,1,1)$ أو $(2,2,2)$ أي : $P(B)=\frac{A_5^3+A_3^3}{A_{10}^3}=\frac{60+6}{720}=\frac{66}{720}$ و منه : $\boxed{P(B)=\frac{11}{120}}$.

الحدث $A\cap B$: (V_1,V_1,V_1) أي : $P(A\cap B)=\frac{A_3^3}{A_{10}^3}=\frac{6}{720}$ و منه : $\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{120}}$.

بما أن الحدثين A و B كيفيين فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

أي نجد : $P(A\cup B)=\frac{1}{15}+\frac{11}{120}-\frac{1}{120}=\frac{18}{120}$ و منه : $\boxed{P(A\cup B)=\frac{3}{20}}$.

الحدث C : هنا كأننا نجزء الكريات الموجودة في الكيس لكريات تحمل رقم معدوم و أخرى لا تحمل رقم معدوم .

أي : $P(C)=\frac{A_8^3}{A_{10}^3}=\frac{336}{720}$ و منه : $\boxed{P(C)=\frac{7}{15}}$.

2) أ- لدينا : X يعبر عن جداء الأرقام الظاهرة في السحب .

و منه قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 4 ، 8 .

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X يكون كما يلي :

$P(X=0)=\frac{3(A_2^1\times A_8^2)+3(A_2^2\times A_8^1)}{720}=\frac{336+48}{720}=\frac{384}{720}$ أو $P(X=0)=1-P(C)=1-\frac{336}{720}=\frac{384}{720}$.

$P(X=1)=\frac{A_5^3}{720}=\frac{60}{720}$ ، $P(X=2)=\frac{3(A_5^2\times A_3^1)}{720}=\frac{3\times60}{720}=\frac{180}{720}$.

$P(X=4)=\frac{3(A_3^2\times A_5^1)}{720}=\frac{3\times30}{720}=\frac{90}{720}$ ، $P(X=8)=\frac{A_3^3}{720}=\frac{6}{720}$.

x_i	0	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{384}{720}$	$\frac{60}{720}$	$\frac{180}{720}$	$\frac{90}{720}$	$\frac{6}{720}$

ب- لدينا : $e^{X^2-X}>1$ تكافئ : $X^2-X>0$ و منه : $X(X-1)>0$.

بعد دراسة الإشارة نجد أنه يكون : $X(X-1)>0$ لما : $X>1$.

إذن : $P\left(X=8\right)+P\left(X=4\right)+P\left(X=2\right)=P\left(e^{X^2-X}>1\right)$ أي : $P\left(e^{X^2-X}>1\right)=\frac{180}{720}+\frac{90}{720}+\frac{6}{720}=\frac{276}{720}$

و منه نجد : $\boxed{P\left(e^{X^2-X}>1\right)=\frac{23}{60}}$.

حل مقترح للتمرين الثالث (الأعداد المركبة) :

1) حل المعادلة :

لدينا : $\left(z^2+4\right)\left(z^2-6z+18\right)=0$ تكافئ : $z^2+4=0$ أو $z^2-6z+18=0$.

و منه : $z^2+4=0$ أو $\Delta=-36=(6i)^2$ أي : $z^2=-4$ و منه : $\begin{cases}z_1=2i\\ z_1=-2i\end{cases}$ أو $\begin{cases}z_3=3-3i\\ z_4=3+3i\end{cases}$.

إذن : $\boxed{S=\{-2i,2i,3-3i,3+3i\}}$.

2) أ- بما أن النقطتان A و B متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل و أيضا النقطتان C و D متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل (لديه ضلعان متوازيان و ضلعان غير متوازيان) ، أيضا و لدينا أيضا : $AD=BC$
بالتالي : الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متقايس الضلعين .

- بالنسبة لمساحة شبه المنحرف نطبق القانون باستعمال الأعداد المركبة و نجد مساحته ببساطة .

ب- بما أن للقطعتين $[AB]$ و $[CD]$ نفس المحور و الذي هو حامل محور الفواصل (xx') فهذا يدل على أن الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C و D مركزها سيكون ينتمي لحامل محور الفواصل ، إذن : $\omega(x,0)$.

لكن نعلم أن : $\omega A=\omega D$ أي : $|z_A-z_\omega|=|z_D-z_\omega|$ أي : $|2i-x|=|3+3i-x|$ أي : $|-x+2i|=|3-x+3i|$

و منه : $\sqrt{(-x)^2+2^2}=\sqrt{(3-x)^2+3^2}$ أي : $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{x^2-6x+18}$ أي : $x^2+4=x^2-6x+18$ أي : $6x=14$

أي : $x=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ و منه : $\boxed{\omega\left(\frac{7}{3},0\right)}$.

إذن : النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $\omega\left(\frac{7}{3},0\right)$.

3) أ- لدينا : $z_D=3+3i$ أي : $|z_D|=3\sqrt{2}$ و $\arg(z_D)=\theta\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ و منه : $\arg(z_D)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن : $\boxed{z_D=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

لدينا : $\alpha\times z_D=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ أي : $\alpha\times3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=3e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه : $\alpha=\frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ أي : $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

أي : $\boxed{\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$ إذن : $|\alpha|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg(\alpha)=\frac{\pi}{12}+2k\pi$.

ب- لدينا : $\frac{\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}}{3+3i}=\frac{3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3+3i}=\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{z_D}=\alpha$.

أي : $\boxed{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i}{4}}=\frac{18-18i+18\sqrt{3}i+18\sqrt{3}}{72}=\frac{\left(3+3\sqrt{3}i\right)(6-6i)}{72}=\frac{3+3\sqrt{3}i}{6+6i}=\alpha$.

- بالمطابقة بين الشكل الأسي و الشكل الجبري للعدد α نجد :

$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ و $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

ج ـ العدد α^n تخيلي صرف معناه : $\arg(\alpha^n)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $n.\arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $\frac{n.\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $\frac{n}{12}=\frac{1}{2}+k$

بضرب الطرفين في 12 نجد : $\boxed{n=12k+6}$ مع $(k\in\mathbb{N})$.

د ـ لدينا : $1=e^{i120\pi}=e^{i\frac{1440\pi}{12}}=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440}=\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440}=\left(\sqrt{2}\alpha\right)^{1440}$ و منه : العدد $\left(\sqrt{2}\alpha\right)^{1440}$ حقيقي .

4) أ ـ لدينا : $\arg(z^2+4)=\arg(z+2i)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي : $\arg[(z-2i)(z+2i)]=\arg(z+2i)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$

لأن : $z^2+4=z^2-(2i)^2$ ، أي : $\arg(z-2i)+\arg(z+2i)=\arg(z+2i)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و بالتالي نجد :

$\arg(z-2i)=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ أي : $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي : $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

إذن : المجموعة (Π) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{2}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .

ب ـ لدينا : $(C): |z-z_C|^2+|z-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$.

ـ النقطة $O\in(C)$ معناه : $|z_O-z_C|^2+|z_O-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$ أي : $|-z_C|^2+|-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$

و منه : $|z_C|^2+|z_D|^2=|z_D-z_C|^2$ أي : $\left(\sqrt{18}\right)^2+\left(\sqrt{18}\right)^2=\left(\sqrt{36}\right)^2$ أي : $36=36$ (محققة)

إذن : النقطة $O\in(C)$.

لدينا : $(C): |z-z_C|^2+|z-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$ أي تصبح : $(C): CM^2+DM^2=CD^2$.

فكرة مهمة :

العلاقة : $CM^2+DM^2=CD^2$ تدل على أن النقطة M ممكن أن تنطبق على C أو على D .

أو تدل على أن المثلث MCD قائم في M و في الحالتين النقطة M تكون في الدائرة ذات القطر $[CD]$.

إذن : المجموعة (C) هي الدائرة ذات القطر $[CD]$.

ملاحظة : يمكن استخدام الشكل الجبري $(z=x+iy)$ للوصول إلى المعادلة الديكارتية للدائرة (C) .

حل مقترح للتمرين الرابع (الدالة اللوغاريتمية) :

الجزء الأول : $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) حساب النهايات :

*) $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x+1}{2x+1}-\ln x\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x+1}=1$ و $\lim_{x\to0}-\ln x=+\infty$.

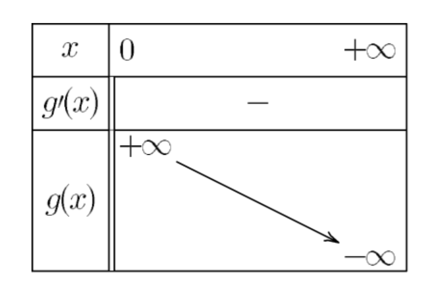
*) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}-\ln x\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to0}-\ln x=-\infty$.

*) التفسير البياني للنهاية عند 0 : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C_g) .

2) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $g'(x)=\frac{-1}{(2x+1)^2}-\frac{1}{x}$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون $g'(x)<0$ إذن : الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

*) جدول التغيرات :



3) أ) *) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]0;+\infty[$ صورة هذا الأخير هي المجال $]-\infty;+\infty[$ و بما أن : $0\in]-\infty;+\infty[$ فإن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$.

ب) لدينا : $\begin{cases} g(1{,}83)=0{,}002 \\ g(1{,}84)=-0{,}002 \end{cases}$ أي : $g(1{,}84)<0<g(1{,}83)$ و منه : $1{,}83<\alpha<1{,}84$.

4) إشارة $g(x)$:

x	0 α $+\infty$
$g(x)$	$+$ 0 $-$

<u>الجزء الثاني :</u> $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$.

1) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{2\ln x}{x^2+x}\right)=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x^2+x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(2\ln x)=-\infty$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2\ln x}{x(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2.\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x+1}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0 \end{cases}$.

*) التفسير البياني :

- المستقيم ذو المعدلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C) .
- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

2) أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f'(x)=2.\frac{\frac{1}{x}(x^2+x)+(2x+1).\ln x}{(x^2+x)^2}$

أي : $f'(x)=2.\frac{(x+1)-(2x+1).\ln x}{(x^2+x)^2}$ (نستخرج $(2x+1)$ عامل مشترك) تصبح :

$f'(x)=2(2x+1).\frac{\frac{x+1}{2x+1}-\ln x}{(x^2+x)^2}$ و منه نجد : $\boxed{f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)}$ هو المطلوب .

ب) نعلم أنه على المجال $]0;+\infty[$ يكون : $\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}>0$ إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

و بالتالي : لما $x\in]-\infty;\alpha]$ تكون : $g(x)\geq 0$ أي : $f'(x)\geq 0$ إذن : الدالة f متزايدة على $]-\infty;\alpha]$.

و لما $x\in]\alpha;+\infty[$ تكون : $g(x)<0$ أي : $f'(x)<0$ إذن : الدالة f متناقصة على $]\alpha;+\infty[$.

ج) نعلم أن : $g(\alpha)=0$ أي : $\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}-\ln\alpha=0$ و منه : $\ln\alpha=\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$.

*) لنحسب $f(\alpha)$ نجد : $f(\alpha)=\frac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}=\frac{2\times\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}{\alpha^2+\alpha}=2\times\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\times\frac{1}{\alpha^2+\alpha}=2\times\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\times\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$

و منه نتحصل على : $\boxed{f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}}$ هو المطلوب .

*) جدول التغيرات :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

د) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $1{,}83<\alpha<1{,}84$ أي : $4{,}66<2\alpha+1<4{,}68$ أي : $\frac{1}{4{,}68}<\frac{1}{2\alpha+1}<\frac{1}{4{,}66}$ و منه نجد :

$0{,}213<\frac{1}{2\alpha+1}<0{,}214...(1)$ و لدينا : $1{,}83<\alpha<1{,}84$ أي : $\frac{1}{1{,}84}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{1{,}83}$ و منه :

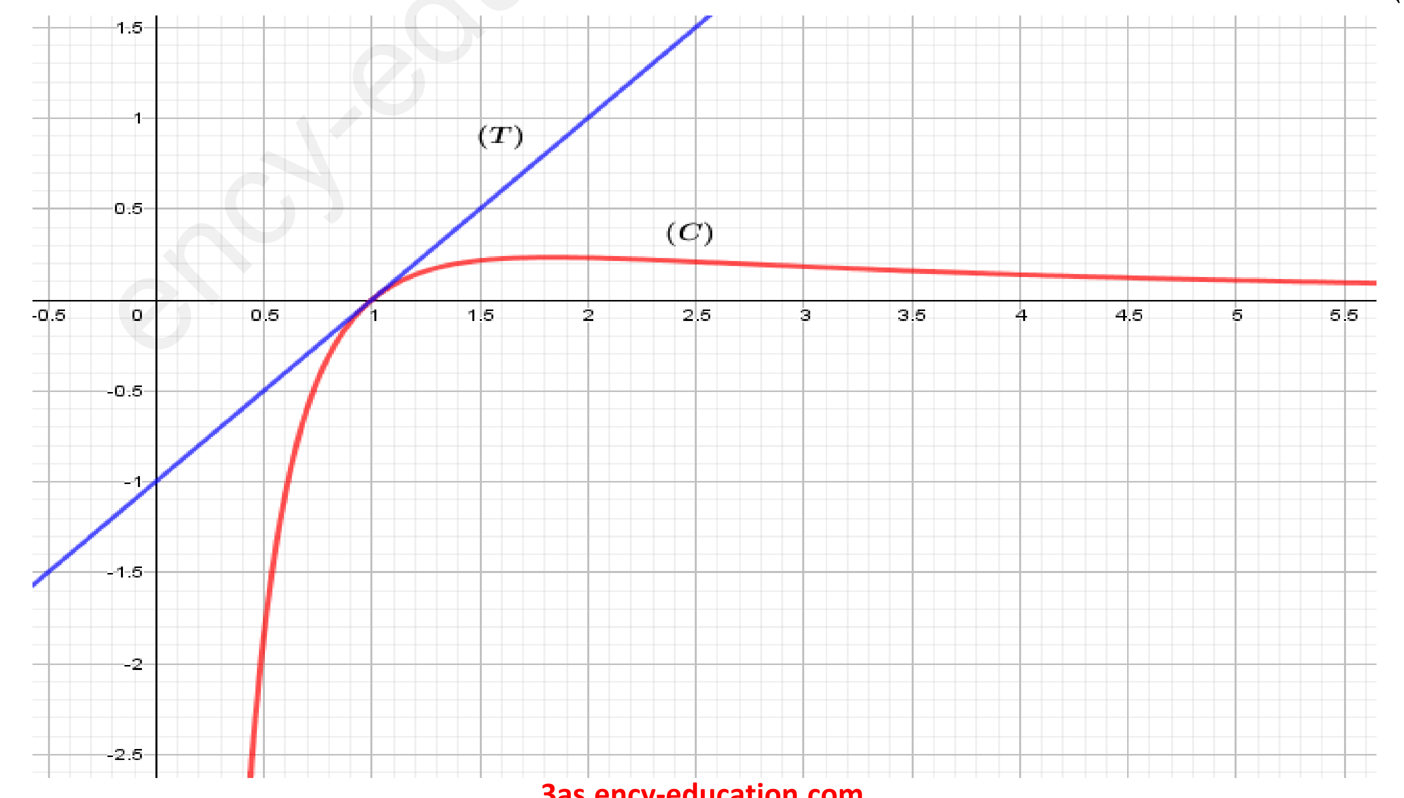
$0{,}543<\frac{1}{\alpha}<0{,}546\,...(2)$ بضرب (1) في (2) نجد : $0{,}115<\frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}<0{,}116$

أي : $0{,}230<\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}<0{,}232$ إذن : $\boxed{0{,}230<f(\alpha)<0{,}232}$.

3) كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي : $(T): y=(x-1)+0$ و منه : $\boxed{(T): y=x-1}$.

4) الإنشـــــاء :



5) أ) لدينا : $(d_m): y = m^2x - 1$.

إذا كان : $x = 0$ فإن : $y = -1$ و النقطة $A(0,-1)$ تنتمي إلى جميع المستقيمات (d_m) .

ب) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = m^2 x - 1$. (ملاحظة : $m^2 \geq 0$) .

*) في حالة $m^2 = 0$ أي : $m = 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

*) في حالة $0 < m^2 < 1$ أي : $-1 < m < 1$ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

*) في حالة $m^2 = 1$ أي : $m = 1$ أو $m = -1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو 1 .

*) في حالة $m^2 > 1$ أي : $m > 1$ أو $m < -1$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .

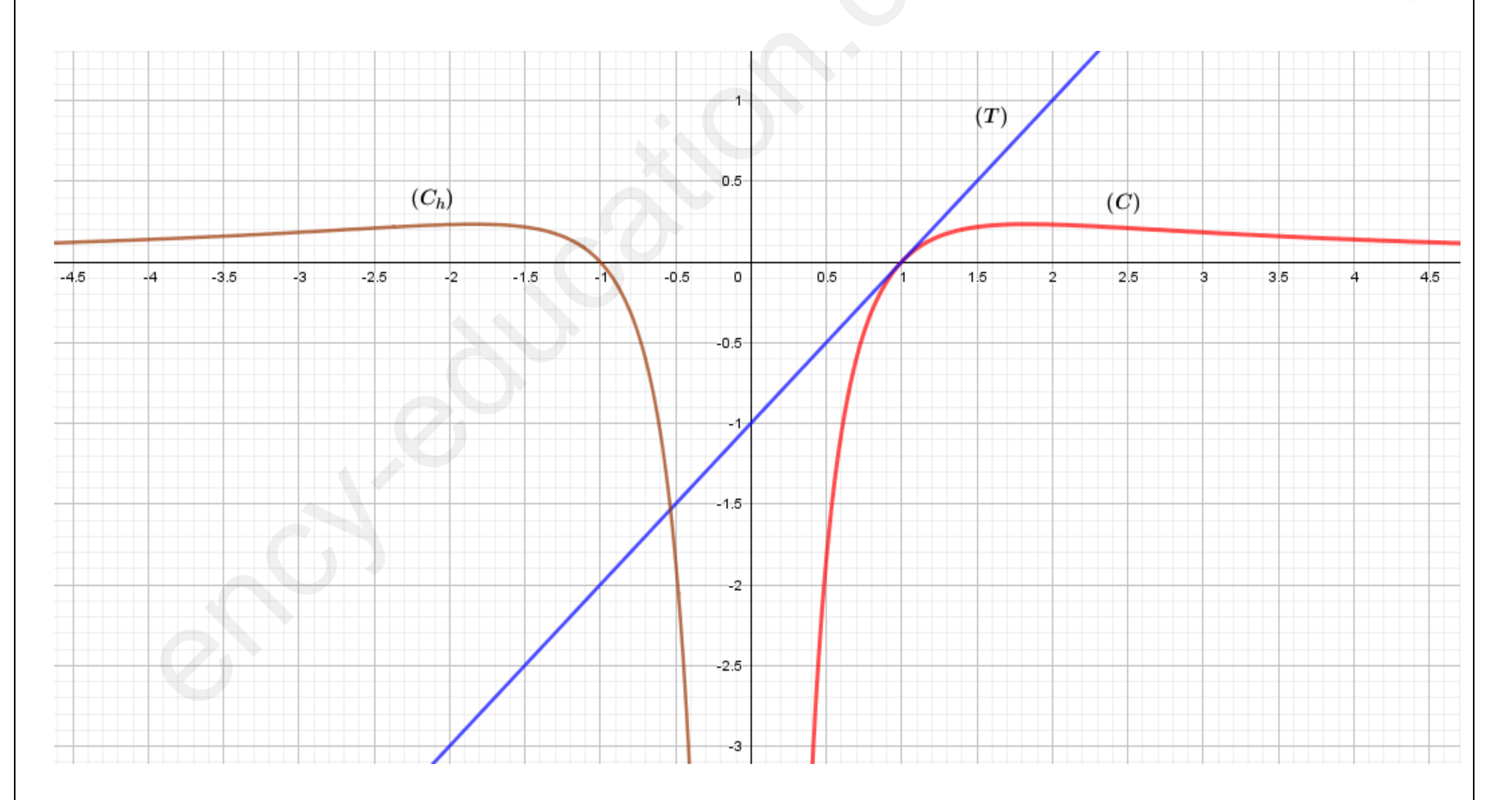
6) أ) لدينا : $h(x) = \frac{2\ln|x|}{x^2 + |x|}$.

بما أن : $x \in]-\infty, 0[$ فإن : $|x| = -x$ و منه : $h(x) = \frac{2\ln(-x)}{x^2 - x}$ أي : $h(x) = f(-x)$.

إذن : (C_h) نظير (C) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

أي : (C_h) هو صورة (C) بواسطة التناظر بالنسبة إلى حامل محورالتراتيب .

ب) الإنشــــــاء :



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي دورة 2020

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات المدة: 4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}$.

1 أ- أحسب u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

2 لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$

أ –بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$

ب أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3 -(w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \dfrac{3}{u_n}$ ، نضع $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = 1 - v_n$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

ج. أحسب نهاية . $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

A" الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

ب. أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ –أنشئ النقط I و A و B

ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C).

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ –أكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$.

1. احسب نهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. احسب $h(1)$ ثم استنتج اشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .
2. بين انهمن اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات.
3. أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثيها
5. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1-\dfrac{\ln(x)}{x}=m$.

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

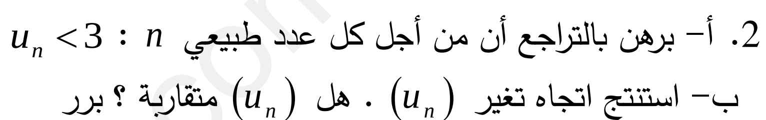
في الرسم المقابل، (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=x$



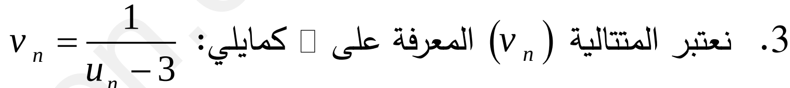
1. أ- باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2. أ- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$



ب- استنتج اتجاه تغير (u_n) . هل (u_n) متقاربة ؟ برر



3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على ℕ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$



أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدها الاول v_0

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

هـ- احسب بدلالة n المجموعين: $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+...+v_n\times u_n$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$.

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y[17]$.

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k;9+24k)$ مع $k\in Z$.

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .
إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.



التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. ما احتمال سحب كرتين بيضاوين
2. نسمي $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n) = \dfrac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$.

ب أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} P(n)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها .

3. فيما يلي نأخذ $n = 5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. عين قيم المتغير العشوائي X .

ب. عين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -x + 1 + e^{-x}$.

1) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (e^x - 1)(2 - x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) –احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أ –بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = -2$ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته

ب– ادرس الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y = x - 2$.

3) بين ان $f'(x) = e^x . g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.

4) بين ان $f(\alpha) = \dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha - 1}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) ارسم (Δ) و (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح الموضوع الأول شعبة التقني رياضي البكالوريا التجريبية 2021

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}$.

1. أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=\frac{4u_0}{1+u_0}=\frac{4}{2}=2$ و $u_2=\frac{4u_1}{1+u_1}=\frac{4\times 2}{1+2}=\frac{8}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$:

لدينا $0<u_0<3$ محققة .

نفرض أن $0<u_n<3$ صحيحة و نبرهن أن $0<u_{n+1}<3$ صحيحة

لدينا $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}$ يعني أن $u_{n+1}=4-\frac{4}{1+u_n}$

$0<u_n<3$ بإضافة 1 نجد $1<1+u_n<4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4}<\frac{1}{1+u_n}<1$ بالضرب في -4 نجد

$-1<-\frac{4}{1+u_n}<-4$ بإضافة 4 نجد $0<4-\frac{4}{1+u_n}<3$ إذن $0<u_{n+1}<3$ محققة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

2. لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$

أ -إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}=\frac{\left(\frac{4u_n}{1+u_n}\right)-3}{\left(\frac{4u_n}{1+u_n}\right)}$ أي أن

$v_{n+1}=\frac{4u_n-3-3u_n}{4u_n}=\frac{1}{4}\left(\frac{u_n-3}{u_n}\right)$ إذن $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و

حدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0}$ أي $v_0=-2$

ب كتابة v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n=v_0.q^n$ أي $v_n=-2.\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و لدينا $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$ يعني

$v_n=1-\frac{3}{u_n}$ و منه $v_n-1=-\frac{3}{u_n}$ أي أن $\frac{1}{v_n-1}=-\frac{u_n}{3}$ إذن $u_n=-\frac{3}{v_n-1}$ بالتعويض نجد

$u_n=-\frac{3}{\left(\frac{-2}{4^n}\right)-1}$ أي أن $u_n=\frac{3\times 4^n}{2+4^n}$.

حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim u_n=\lim\left(\frac{3\times 4^n}{4^n}\right)=3$.

3. المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع

$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

أ. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$ لدينا $w_n = \frac{3}{u_n}$ و لدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني

$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ بالجمع نجد $w_n + v_n = 1$ و منه $w_n = 1 - v_n$ و هو المطلوب .

ب. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

S_n هو مجموعة متتالية هندسية و متتالية ثابتة إذن $S_n = (n+1) - v_0 . \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right]$ أي أن

$$S_n = (n+1) + \frac{8}{3} . \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

ح. حساب نهاية $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$. : $\lim \frac{S_n}{n} = \lim \left[\frac{(n+1)}{n} + \frac{8}{3n} . \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right] = 1$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ،1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

A" الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

$P(A) = \frac{C_6^2 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ و $P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^1 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$ و

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_8^2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28}$	$\frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{7}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

ب. حساب الأمل ألرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$E(X)=\frac{0\times 6+1\times 12+2\times 7+3\times 3}{28}=\frac{35}{28}=\frac{5}{4}$ إذن $E(X)=1,25$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

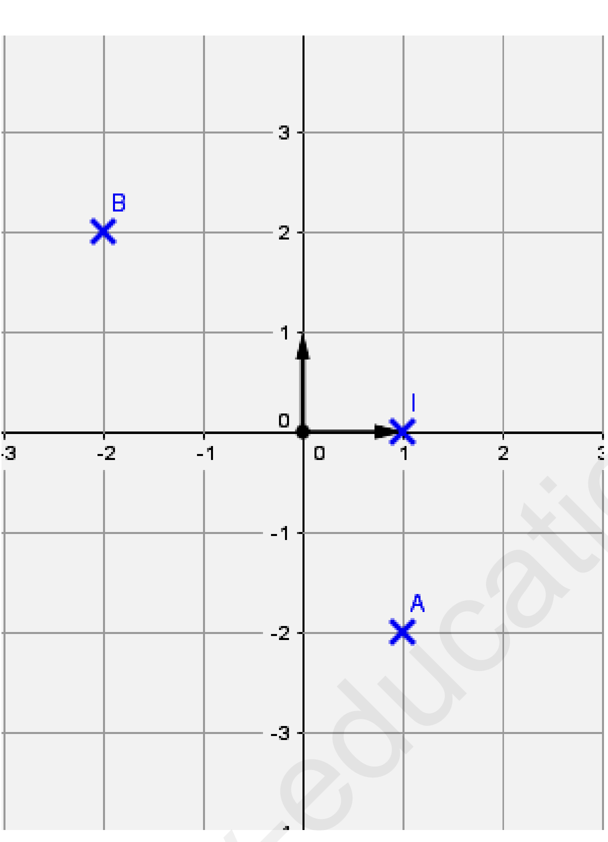
1. تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$ يكافئ أن $2\overline{\alpha}-\alpha=1+6i$ بوضع

$\alpha=x+iy$ نجد $x-3iy=1+6i$ و منه $\begin{cases}x=1\\ -3y=6\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ و منه $\alpha=1-2i$ بالتعويض

في معادلة من معادلتي الجملة نجد $1-2i+\beta=-1$ إذن $\beta=-2+2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$

أ–أنشاء النقط I و A و B



ب–تعيين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي أن

$z_w=\frac{z_A+z_B}{2}=-\frac{1}{2}$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$

كتابة z_D على شكل الجبري :

$z_D=\frac{3+9i}{4+2i}=\frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\frac{30+30i}{20}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C): $|z_D-z_w|=\left|\frac{4}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\frac{5}{2}$ و $|z_A-z_w|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}$ و منه محققة

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ –كتابة العدد $z_E+\frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

يعني أن $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن

$z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

ب استنتج أن $z_E=\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}i$: لدينا $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و

منه $z_E=\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

التمرين الرابع : (07 نقاط) :

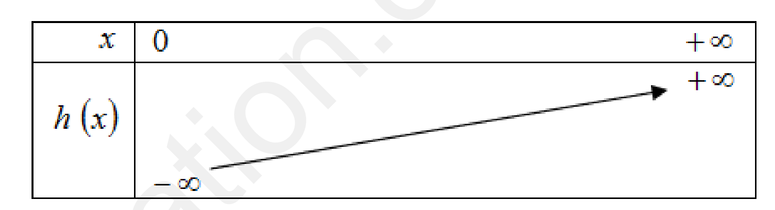
I - نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$.

1. حساب النهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$:

النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}h(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left[x^2-1+\ln(x)\right]=-\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$: $h'(x)=2x+\frac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة h متزايدة على $]0;+\infty[$ و

جدول تغيرات:



2. حساب $h(1)$: $h(1)=1^2-1+\ln(1)=0$

استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$: بما أن الدالة hمتزايدة على $]0;+\infty[$ و تنعدم عند 1 فإن $h(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ بالتزايد المقارن

حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$: حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$

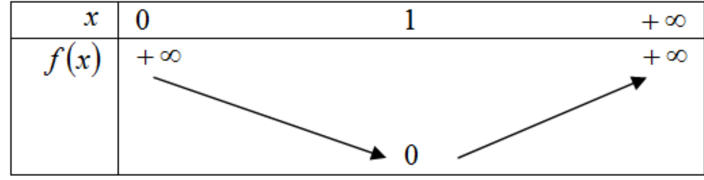
تفسير النتيجة بيانيا المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب له معادلة من الشكل $x=0$.

2. بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$:

$f'(x)=1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right).x-\ln(x)}{x^2}$ و منه $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ محققة

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;1]$

جدول تغيرات الدالة f :



x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3. أ) إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته

من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى

(C_f) : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]=0$ و منه محققة.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]$

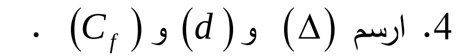
و هو موجب على المجال على المجال $]0;1[$ إي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .

و سالب على المجال على المجال $]1;+\infty[$ إي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.

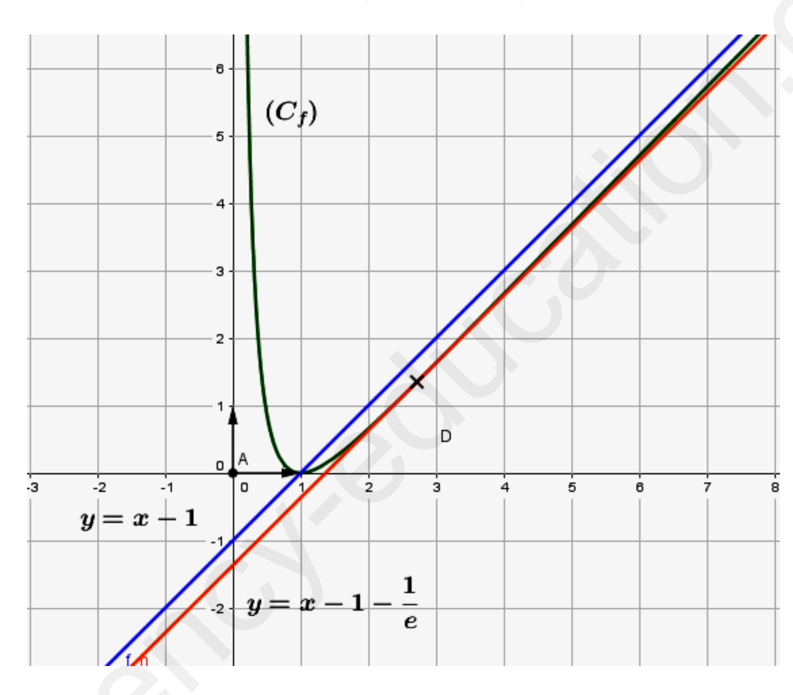
1. إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين

احداثيها : معامل توجيهه هو $f'(x)=1$ يعني أن تكافئ $\frac{g(x)}{x^2}=1$ يعني أن $g(x)=x^2$ يكافئ أن

$\ln(x)=1$ يكافئ أن $x=e$ و منه ف $A(e;\ f(e))$ أي أن $A\left(e\ ;\ e-1-\frac{1}{e}\right)$



4. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .



5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1-\frac{\ln(x)}{x}=m$.

يعني أن $x-1-\frac{\ln(x)}{x}=x+m$ أي أن $f(x)=x+m$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم $(\Delta_m):y=x+m$

لما $m\in\left]-\infty;-1-\frac{1}{e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=-1-\frac{1}{e}$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left]-1-\frac{1}{e};-1\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m\in[-1;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد

انتهى الموضوع الأول

التصحيح المفصل للموضوع الثاني شعبة التقني رياضيات

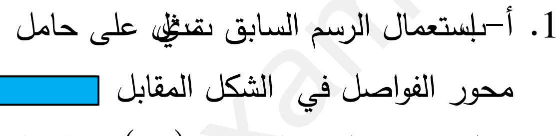
التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\,;\,6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل ، (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=x$

1. أ- باستعمال الرسم السابق تمثيل على حامل محور الفواصل في الشكل المقابل



ب- التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها :

(u_n) متتالية متزيدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (C_f) فهي متقاربة

2. أ- البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$:

$u_0<3$ محققة

نفرض أن $u_n<3$ صحيحة و نبرهن صحة $u_{n+1}<3$

$u_n<3$ بالضرب في (-1) نجد $-u_n>-3$ بإضافة 6 نجد $6-u_n>3$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{6-u_n}<\dfrac{1}{3}$ بالضرب في 9 نجد $\dfrac{9}{6-u_n}<3$ أي أن $u_{n+1}<3$ صحيحة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$.

ب- استنتاج اتجاه تغير (u_n) : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9}{6-u_n}-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n}$ يعني أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$ بما أن $u_n<3$ فإن الفرق موجب إذن المتتالية (u_n) متزايدة .

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى هي متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ – البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية : $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}$ أي أن $v_{n+1}=\frac{6-u_n}{9-18+3u_n}$ و منه

$v_{n+1}=\frac{6-u_n}{3u_n-9}$ بحساب الفرق نجد $v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$ أي

$v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n-3}{3u_n-9}=-\frac{(3-u_n)}{3(3-u_n)}$ إذن $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}$ و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها

$-\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-3}=-\frac{1}{6}$

ب – كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0+n.r$ أي $v_n=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n$

استنتاج عبارة u_n : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ يعني أن $u_n-3=\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ أي أن $u_n=3+\frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n}$

و منه , $u_n=3+\frac{6}{-1-2n}$ إذن $u_n=\frac{3-6n}{-1-2n}$

حساب $\lim_{x\to+\infty}u_n$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-6n}{-2n}\right)=3$

هـ – حساب بدلالة n المجموعين:

المجموع الأول : $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ أي $S_n=\frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}$ أي $S_n=\frac{(n+1)\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n\right)}{2}$ و منه

$S_n=\frac{(n+1)(-1-n)}{6}$ إذن $S_n=-\frac{(n+1)^2}{6}$

و المجموع الثاني : $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+...+v_n\times u_n$. لدينا $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n\times v_n=3v_n+1$ و

منه S'_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتاليتين متتالية حسابية و متتالية ثابتة إذن $S'_n=3S_n+(n+1)$ أي أن

$S'_n=-3\frac{(n+1)^2}{6}+(n+1)$ إذن $S'_n=\left[-\frac{(n+1)}{2}+1\right](n+1)$ أي $S'_n=-\frac{1}{2}(1-n).(n+1)$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ لدينا $2^2\equiv1[3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n}\equiv1[3]$ و منه

$2^{2n}-1\equiv0[3]$ و منه صحيحة.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv0[6]$ فإن $x\equiv0[6]$:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2-x\equiv$	0	0	2	0	0	2	$[6]$

و منه خاطئة

3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.

$x^2 \equiv y^2 [17]$ يعني إن $x^2 - y^2 \equiv 0 [17]$ يكافئ أن $x^2 - y^2$ مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ إذن 17 قاسم$(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x \equiv y [17]$ أو $x \equiv -y [17]$ و منه خاطئة .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل $(4+10k ; 9+24k)$ مع $k \in Z$: $12(4+10k) - 5(9+24) = 12 \times 4 + 120k - 5 \times 9 - 120k$ و منه $12(4+10k) - 5(9+24) = 3$ إذن محققة و منه صحيحة

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27.

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M \equiv 0 [27]$ أي أن $100a + 10b + c \equiv 0 [27]$ أي أن $M - N \equiv -N [27]$ أي أن $M - N \equiv -100b - 10c - a [27]$ أي

$M - N \equiv -a - 100b - 10c [27]$ و $-999 \equiv 0 [27]$ أي أن و منه $M - N \equiv -1000a - 100b - 10c [27]$

أي $M - N \equiv -10(100a + 10b + c) [27]$ أي أن $M - N \equiv -10M [27]$ و $M \equiv 0 [27]$ إذن

$M - N \equiv 0 [27]$ صحيحة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. احتمال سحب كرتين بيضاوين : $P(A) = \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n!}{2(n-2)!}}{\frac{(n+7)!}{2(n+5)!}} = \frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$.

2. نسمى $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$: $P(n) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_3^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 6 + 3}{\frac{(n+7)(n+6)}{2}}$ أي ان

$$P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

ب –حساب $\lim_{n \to +\infty} P(n)$: $\lim_{n \to +\infty} P(n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2}\right) = 1$

تفسير النتيجة المحصل عليها : كلما كان عدد الكرات البيضاء أكبر فإن احتمال سحب كرتين من نفس اللون يقترب احتمالها من 1 .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. قيم المتغير العشوائي X هي -60 ، -20، -10 ، 10 ، 20 ، 50

n كرية بيضاء حيث $n\geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء

ب. تعيين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X :

x_i	-60	-20	-10	10	20	50
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{10}{66}$

حساب أمله الرياضياتي: $E(X)=\frac{-60\times 3-20\times 12-10\times 6+10\times 15+20\times 20+50\times 10}{66}=\frac{570}{66}=\frac{95}{11}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I – نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-x+1+e^{-x}$.

1. حساب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ بالتزايد المقارن

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g: $g'(x)=-1-e^{-x}$ سالبة تماما

و منه الدالة g متناقصة على المجال $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

3. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $1.27<\alpha<1.28$: $g(1{,}27)=0{,}010$ و $g(1{,}28)=-0{,}0001$ بما أن الدالة g مستمرة و متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ حسب مبرهن القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1.27<\alpha<1.28$

استنتلج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		+	0	−	

II – نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(e^{x}-1)(2-x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x.e^x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[-(2-x)]=-\infty$

.2 أ–إثبات أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}[e^x.(2-x)-2]=-2$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}[e^x.(2-x)]=0$ التزايد المقارن .

استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته : بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$ فإن $y=x-2$ معادلة نصف مستقيم المقارب المائل جهة $-\infty$.

ب– دراسة الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y=x-2$:

إشارة الفرق $[f(x)-x+2]=e^x(2-x)$ من إشارة $(2-x)$

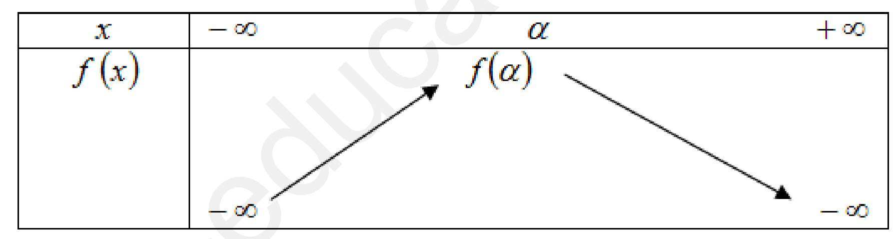
و المستقيم (Δ) و (C_f) المنحنى يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $f(x)-y$	+	0	—
الوضعية :	(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	(C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)

.3 إثبات إن $f'(x)=e^x.g(x)$: $f(x)=(e^x-1)(2-x)$ يعني أن $f'(x)=e^x(2-x)-(e^x-1)$ أي أن $f'(x)=e^x[(2-x)-(1-e^{-x})]$ و منه $f'(x)=e^x[-x+1+e^{-x}]$ إذن $f'(x)=e^xg(x)$

استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^xg(x)$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة على $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات :



.4 إثبات أن $f(\alpha)=\frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$: $g(\alpha)=0$ يعني $-\alpha+1+e^{-\alpha}=0$ يعني أن $e^{-\alpha}=\alpha-1$ أي $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$ و $f(\alpha)=(e^{\alpha}-1).(2-\alpha)$ بالتعويض نجد $f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha-1}-1\right).(2-\alpha)$ و منه $f(\alpha)=\frac{(2-\alpha).(2-\alpha)}{\alpha-1}$ إذن $f(\alpha)=\frac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$.

استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$: $1,27<\alpha<1,28$ و منه $0,27<\alpha-1<0,28$ بالقلب نجد

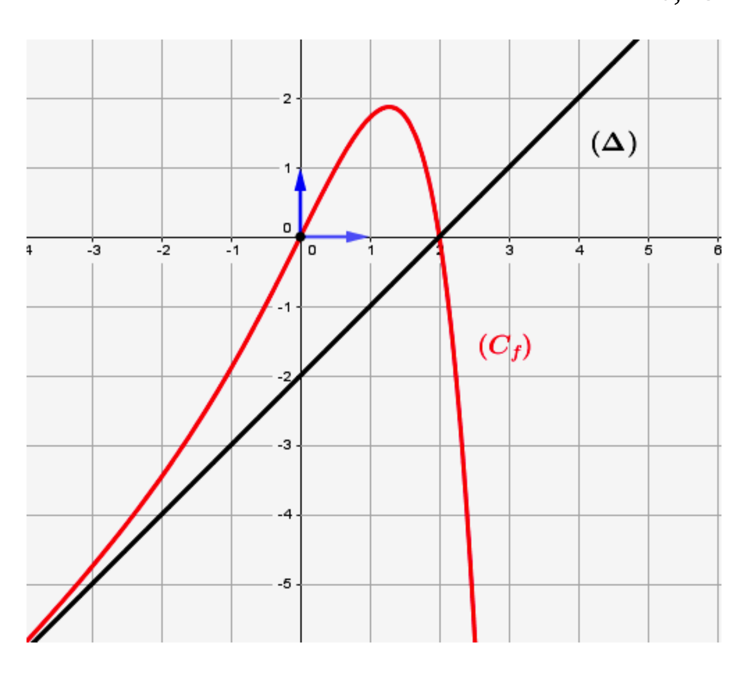
$\frac{1}{0,28}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0,27}$ ....(1)

و $1,27 < \alpha < 1,28$ بإضافة -2 يعني $-0,73 < \alpha - 2 < -0,72$ بالتربيع نجد

$0,72^2 < (\alpha - 2)^2 < 0,73^2$..............(2)

بضرب (1) و (2) نجد $\frac{0,72^2}{0,28} < \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1} < \frac{0,73^2}{0,27}$ أي أن $1,85 < f(\alpha) \leq 1,97$

5. رسم (Δ) و (C_f) :



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة 2021

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات — المدة :3 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{R}$ بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=3-\dfrac{10}{u_n+4}$.

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 1$.

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ. أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ ثم أحسب حدها الأول v_0

ب. عبر عن v_n و u_n بدلالة n ، و أحسب من جديد $\lim u_n$.

3) أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n=v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots+v_{n+2021}$ ثم استنتج بدلالة n ،

المجموع S_n' حيث : $S_n'=\dfrac{1}{u_{n+1}+2}+\dfrac{1}{u_{n+2}+2}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n+2021}+2}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

إناء به 5 كريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس : 2 كرية خضراء و 3 كريات حمراء .

1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتان من الإناء . نرمز بـ X إلى المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الخضراء المسحوبة .

أ. تحقق أن $p(X=0)=\dfrac{3}{10}$ ثم عين قانون احتمال X ثم أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

ب. أحسب احتمال الحادثة A : " الكريتان المسحوبتان من نفس اللون " .

2) نسحب على التوالي كريتين من الإناء بالطريقة التالية : إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء نعيدها إلى الإناء ، وإذا كانت الكرية المسحوبة خضراء لا نعيدها إلى الإناء. نرمز إلى كرية خضراء بالرمز V وإلى كرية حمراء بالرمز R

أ. انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة .

V
V
R
R
V
R

ب. احسب احتمال الحادثتين: B: "الكرية المسحوبة الأولى خضراء " . C : " إحدى الكريتين المسحوبتين خضراء " .

ج. بين أن احتمال أن يوجد في الإناء 2 كرية خضراء هو $\dfrac{9}{25}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} z_1 + iz_2 = \sqrt{3} + i \\ 2iz_1 - z_2 = 2i\sqrt{3} \end{cases}$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2i$.

1) بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 ثم مثل النقط A ، B و C

2) تحقق أن $\frac{z_A}{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB واحسب مساحته .

3) عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;1)\}$

4) عين (Γ_1) مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2$

5) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $\arg(z+2i) = \frac{\pi}{3}$.

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ثم عين المجموعة (Γ_2) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (x-1)e^{2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ. أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

3. بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x) = 1 + (2x-1)e^{2x}$

4. إليك جدول تغيرات الدالة f' الدالة المشتقة للدالة f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

أ. برر أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياها

ب.حدد حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . برر أن $0,8 < \alpha < 0,9$.

6. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم أكتب معادلة لـ (T) . أرسم (C_f) ، (Δ) و (T) .

7. m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $me^{-2x} - x + 1 = 0$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n < 4$.

2. أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$

ب. استنتج اتجاه تغير (u_n) ثم برر لماذا (u_n) متقاربة .

3. أ.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le 4 - u_n \le \dfrac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

ج. استنتج نهاية (u_n)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون " .

B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين "

C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .

أ – بين أن احتمال الحادثة B يساوي $\dfrac{4}{5}$ ثم أحسب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C .

ب – أحسب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .

ج – استنتج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين.

II) نضيف إلى الكيس 2 قريصة حمراء. الكيس يحوي إذن 12 قريصة . نسحب الآن 3 قريصات في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .

أ – برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 .

ب – بين أن $p(X = 2) = \dfrac{71}{110}$ ثم عين قانون احتمال المتغير X و احسب أمله الرياضي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أجوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ;\overrightarrow{OI} ,\overrightarrow{OJ})$.

A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ و $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.



1. الشكل الجبري للعدد z_A هو : أ) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ب) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ج) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ د) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. الشكل الأسي لـ z_C هو : أ) $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ب) $-e^{i\frac{\pi}{2}}$ ج) $-2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ د) $\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$

3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(D;1)\}$:

أ) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ب) $-1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})i$ ج) $1+i$ د) $1+\frac{1}{2}i$.

1. ليكن n عددا طبيعيا،العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

أ) $4k$ ب) $4k+1$ ج) $8k+4$ د) $8k$ $(k\in\mathbb{N})$

5. مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث : $(z+1-i\sqrt{3})(\bar{z}+1+i\sqrt{3})=4$ هي :

أ) دائرة ب) نقطة ج) مستقيم د) قطعة مستقيمة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أثبت أن : – إذا كان $x>1$ فإن: $x^2-1+\ln x>0$.
   – إذا كان $0<x<1$ فإن: $x^2-1+\ln x<0$.
2. أ. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$.

   جـ. شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

   ب. أدرس وضعية المنحني (C_f)بالنسبة إلى (Δ)

   ج. بين أن المنحني (C_f)يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
4. أنشئ المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) .
5. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ $g(x)=x-\frac{\ln|x|}{x}$.

   أ. بين أن الدالة g فردية ثم باستعمال المنحني (C_f) ارسم المنحني (C_g)
6. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x)=m$ حلين متمايزين .
7. h الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{x^2-1-\ln(x-1)}{x-1}$

   بين أن $h(x)=f(x-1)+2$ ، اشرح كيف يمكن رسم المنحنيٍ (C_h)انطلاقا من (C_f)

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة : الرياضيات / الشعبة علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2021

<table dir="rtl">
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأول)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول :
1.أ) البرهان بالتراجع</td><td>0.50+0.25</td><td rowspan="9">4</td></tr>
<tr><td>ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$ بما أن $0\le u_n<1$ فإن : $u_{n+1}-u_n>0$ إذن (u_n) متزايدة تماما</td><td>2×0.25</td></tr>
<tr><td>-استنتاج أن (u_n) متقاربة.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>-حساب النهاية : (u_n) متقاربة إذن $\lim u_n=l$ و $\lim u_{n+1}=l$ ومنه l حل للمعادلة
$l=3-\frac{10}{l+4}$ أي $l=1$ أو $l=-2$. وبما أن $u_0=0$ و (u_n) متزايدة فإن : $l=1$ أي $\lim u_n=1$.</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>2. أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$.</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ و $u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>حساب $\lim u_n$: لدينا $-1<\frac{2}{5}<1$ إذن : $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ ومنه : $\lim u_n=1$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3. حساب S_n $S_n=v_{n+1}\frac{1-q^{2021}}{1-q}=-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{2021}\right]$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>استنتاج حساب S_n' حيث : $S_n'=\frac{1}{u_{n+1}+2}+\frac{1}{u_{n+2}+2}+...+\frac{1}{u_{n+2021}+2}$
لدينا : $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$ إذن :
$S_n'=\frac{1}{3}(1-v_{n+1})+\frac{1}{3}(1-v_{n+2})+...+\frac{1}{3}(1-v_{n+2021})$ أي : $S_n'=\frac{1}{3}(2021-S_n)$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>التمرين الثاني :
1. التحقق أن $p(X=0)=\frac{3}{10}$</td><td>0.5</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>قانون احتمال X : $p(X=1)=\frac{C_2^1\times C_3^1}{10}=\frac{6}{10}$ ، $p(X=2)=\frac{C_2^2}{10}=\frac{1}{10}$
<table><tr><td>X_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$p(X=X_i)$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{6}{10}$</td><td>$\frac{1}{10}$</td></tr></table>
الأمل الرياضياتي : $E(X)=\frac{4}{5}$.</td><td>1
0.5</td></tr>
</table>

2 أ) الشجرة : V : $\frac{2}{5}$ ؛ V : $\frac{1}{4}$ ، R : $\frac{3}{4}$ R : $\frac{3}{5}$ ؛ V : $\frac{2}{5}$ ، R : $\frac{3}{5}$	01	4
ب) $p(B)=\frac{2}{5}$ ، $p(C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{27}{50}$	2×0.5	
ج) احتمال أن يبقى في الإناء 2 كرية خضراء يعني سحب كريتان حمراء: $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$	0.5	
التمرين الثالث : I) $z_1=\sqrt{3}-i$ و $z_2=2$	2×0.5	5
II) 1. تبيين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 . تمثيل النقط	0.75+1	
2. التحقق أن $\frac{z_A}{z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ – استنتاج طبيعة المثلث – مساحة المثلث تحقق أن $S_{ABC}=\sqrt{3}\,u.a$	0.25 0.25+0.5	
3. $z_D=-2i$.	0.25	
4. (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها $D(0;-2)$ ونصف قطرها 2.	0.50	
5. التحقق أن B تنتمي إلى (Γ_2) $\arg(z_B+2i)=\frac{\pi}{3}$. $\arg(z+2i)=\frac{\pi}{3}$ معناه $\arg(z-z_D)=\frac{\pi}{3}$ أي $(\vec{u};\overrightarrow{DM})=\frac{\pi}{3}$ إذن (Γ_2) هي نصف المستقيم $[DB)$ باستثناء النقطة D	0.25 0.25	
التمرين الرابع : 3. 1. تبيين أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ثم حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.	0.25+0.5	7
2. أ. إثبات أن $(\Delta):y=x$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$	0.5	
ب. الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	0.5	
3. بين أن من أجل كل x من ℕ؛ $f'(x)=1+(2x-1)e^{2x}$	0.5	
4.أ) تبرير أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I (بأي طريقة) تعيين إحداثيا I : $I(0;f(0))$ أي $I(0;-1)$	2×0.25	
ب. إشارة $f(x)$ ؛ جدول التغيرات	2×0.5	
5. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على ℝ حلا وحيدا α . تبرير أن $0,8<\alpha<0,9$.	0.5	
6. تبيين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) معادلة المماس (T) : - رسم (C_f) ، (Δ) و (T)	0.50 0.25 1	
7. المناقشة البيانية حسب قيم m لعدد حلول المعادلة $me^{-2x}-x+1=0$.		

	0.25	• $me^{-2x}-x+1=0$ معناه $f(x)=x+m$
	3×025	• $m<-\frac{e}{2}$ ليس للمعادلة حلا . • $m=-\frac{e}{2}$ أو $m\geq 1$ للمعادلة حل واحد • $-\frac{e}{2}<m<1$ حلين

التصحيح المفصل للإمتحان التجريبي

الموضوع الثاني

التمرين الأول(04 نقاط):

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$.

2. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n<4$.

. من أجل $n=0$ ، $u_0=0$ و $0\leq u_0\leq 4$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$ 0.25

. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي : $0\leq u_n\leq 4$ و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$

أي : $0\leq u_{n+1}\leq 4$

لدينا : $0\leq u_n\leq 4$ ، نضرب أطراف المتباينة في 3 نجد : ، $0\leq 3u_n\leq 12$ نضيف 4 نجد:

$4\leq 3u_n+4\leq 16$ و منه $0\leq 2\leq\sqrt{3u_n+4}\leq 4$ و بالتالي $0\leq u_{n+1}\leq 4$.......... 0.5

2. أ. نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n+4}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{3u_n+4}-u_n=\frac{(\sqrt{3u_n+4}-u_n)(\sqrt{3u_n+4}+u_n)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{3u_n+4-u_n{}^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$$ 0.75

لدينا: $\frac{-(u_n+1)(u_n-4)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{3u_n+4-u_n{}^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=u_{n+1}-u_n$

بما أن $0\leq u_n\leq 4$ فإن : $1\leq u_n+1\leq 5$ و $-4\leq u_n-4\leq 0$ و $\sqrt{3u_n+4}+u_n>0$

إذن : $u_{n+1}-u_n<0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما................ 0.5

بماأن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة................0.25

4. أ.نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$:

لدينا : $4-u_{n+1}=4-\sqrt{3u_n+4}=\frac{(4-\sqrt{3u_n+4})(4+\sqrt{3u_n+4})}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{16-3u_n-4}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}$

لدينا أيضا : $0\leq u_n\leq 4$ و منه : $4\leq 3u_n+4\leq 16$ و $2\leq\sqrt{3u_n+4}\leq 4$ و بالتالي :

$6 \leq 4+\sqrt{3u_n+4} \leq 8$ إذن : $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{1}{8}$ و بما أن $4-u_n \geq 0$ إذن :

$\frac{3(4-u_n)}{6} \leq \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}$ ومنه $4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$ 0.75

ت. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 4-u_n \leq \frac{1}{2^n}(4-u_0)$:

لدينا : $4-u_n \leq \frac{1}{2}(4-u_{n-1})$ ، $4-u_{n-1} \leq \frac{1}{2}(4-u_{n-2})$ ، $4-u_{n-2} \leq \frac{1}{2}(4-u_{n-3})$ ،....

$4-u_1 \leq \frac{1}{2}(4-u_0)$ ، بالضرب طرفا إلى طرف نجد:

$(4-u_n)(4-u_{n-1})(4-u_{n-2})\dots(4-u_1) \leq \frac{1}{2}(4-u_{n-1})\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\frac{1}{2}(4-u_{n-3})\dots\frac{1}{2}(4-u_0)$

نختزل الأطراف المتشابهة نجد : $0 \leq (4-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)$..........0.5

ح. استنتاج نهاية (u_n) :

بما أن : $0 \leq (4-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n 4$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n 4 = 0$ و منه حسب النهايات بالمقارنة $\lim_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$

و بالتالي : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$ 0.5

التمرين الثاني (04 نقاط):

I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون " .

B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين "

C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .

ت تبين أن احتمال الحادثة B يساوي $\frac{4}{5}$ لدينا: $\bar{B}$: " الحصول على قريصتين تحملان رقمين متشابهين "

$p(B) = 1-p(\bar{B}) = 1-\frac{C_4^2+C_2^2+C_2^2+C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$ 0.5

. حساب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C :

$p(A) = \frac{C_7^2+C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ 0.5

$p(C) = \frac{C_4^1\times C_2^1+C_2^1\times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$ 0.5

ب- حساب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .

$p(A\cap B) = \frac{C_3^1\times C_2^1+C_3^1\times C_2^1+C_2^1\times C_2^1+C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$ 0.5

ج-استنتاج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين:

$p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = \frac{8}{15}+\frac{4}{5}-\frac{2}{5} = \frac{14}{15}$ 0.5

II) نضيف إلى الكيس 2 قريصة حمراء. الكيس يحوي إذن 12 قريصة . نسحب الآن 3 قريصات في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .

أ .تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 :

قيم X هي: $X = 1$ في حالة ظهور 3 كرات بيضاء BBB أو 3 كرات سوداء NNN، $X = 2$ ظهور لونين أسود و أبيض NNB أو BBN أو أبيض و أحمر: BBR أو BRR أو أسود و أحمر : NNR أو NRR ، $X = 3$ ظهور 3 ألوان أبيض ، أسود و أحمر: BNR............. 0.5

ب. بيان أن $p(X=2)=\frac{71}{110}$:

$p(X=2) = \frac{C_7^2\times C_5^1+C_3^2\times C_9^1+C_2^2\times C_{10}^1}{C_{12}^3} = \frac{142}{220} = \frac{71}{110}$ 0.25

. قانون احتمال المتغير X: $p(X=1) = \frac{C_7^3+C_{10}^3}{C_{12}^3} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$ ، $p(X=3) = \frac{C_7^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{12}^3} = \frac{42}{220} = \frac{21}{110}$

X	1	2	3
$p(X)$	$\frac{9}{55}$	$\frac{71}{110}$	$\frac{21}{110}$

.... 0.5

حساب أمله الرياضي: $E(X) = 1\times\frac{9}{55} + 2\times\frac{71}{110} + 3\times\frac{21}{110} = \frac{223}{110} = 2.027$ 0.25

التمرين الثالث (05 نقاط):

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أجوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$.

A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=-1+i\sqrt{3}$.

1. الشكل الجبري للعدد z_A هو:

لدينا : $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي ج) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 0.25

2. الشكل الأسي لـ z_C هو:

لدينا : $z_C = -1+i\sqrt{3}$ ، $|z_C| = \sqrt{1+3} = 2$ و $\arg(z_C) = \arg(-1+i\sqrt{3}) = \theta$ بحيث

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ إذن $\theta = \frac{2\pi}{3}+2\pi k$ و بالتالي : $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.............0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ 0.25

3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(D;1)\}$ هي:

لدينا: $z_O = \frac{z_A-z_B+z_D}{1-1+1}$ و منه $z_D = z_O - z_A + z_B$ إذن $z_D = -\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$

ومنه : $z_D = -1+i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ .... 0.75.إذن الإجابة الصحيحة هي ب) $-1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})i$ 0.25

4. ليكن n عددا طبيعيا،العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

الشكل الأسي لـz_B هو : $z_B = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$، $\arg(z_C) = \arg\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = \alpha$ و $|z_B| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ بحيث:

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و بالتالي $z_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ و منه $(z_B)^n =$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{n}\pi}{4}}$

$(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه : $\frac{\mathrm{n}\pi}{4} = 2k\pi$ و منه : $\mathrm{n} = 8k$ حيث k عدد صحيح 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: د) $8k$ 0.25

5. مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث : $(z+1-i\sqrt{3})(\overline{z}+1+i\sqrt{3}) = 4$ هي :

لدينا : $(z+1-\mathrm{i}\sqrt{3})(\bar{z}+1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = (z+1-\mathrm{i}\sqrt{3})\left(\overline{z+1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right) = |z+1-\mathrm{i}\sqrt{3}|^2$

$(z+1-\mathrm{i}\sqrt{3})(\bar{z}+1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = |z-(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})|^2 = |z-z_C|^2 = 4$

معناه $MC^2 = 4$ و منه $MC = 2$ إذن مجموعة النقط هي دائرة ذات المركز C و نصف القطر 2 ...... 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) دائرة 0.25

التمرين الرابع(07 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4. أثبات أن : − إذا كان $x > 1$ فإن: $x^2 - 1 + \ln x > 0$.

− إذا كان $0 < x < 1$ فإن: $x^2 - 1 + \ln x < 0$.

نضع : لتكنk الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $k(x) = x^2 - 1 + \ln x$

ندرس إتجاه تغير الدالة k $k'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ، من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ $k'(x)$ موجة و منه

الدالةk متزايدة تماما على $]0;+\infty[$...0.25 $\lim\limits_{x \to 0^{>}} k(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

إذن جدول تغيرات الدالة k : 0.25

x	0	1	$+\infty$
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

و لدينا $k(1) = 0$

إذن $k(x)$ موجبة على $[0;1]$ و سالبة على $[1;+\infty[$ و بالتالي : إذا كان $x > 1$ فإن: $x^2 - 1 + \ln x > 0$ و إذا كان $0 < x < 1$ فإن: $x^2 - 1 + \ln x < 0$ ... 0.5

2. أ. حساب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$: $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^{>}}\left[x - \frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$ 0.25

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل حامل محور التراتيب مستقيم مقارب.......... 0.25

. حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ 0.25

ب. نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

لدينا : $\frac{x^2-1+\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} - 1 = \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} - f'(x) = 1$ 0.5

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2-1+\ln x)$ إذن f متناقصة تماما على المجال$]0;1]$ و متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ 0.25

ج. نشكل جدول تغيرات الدالة f : 0.25

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. أ. نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ $= [x - \frac{\ln x}{x} - x] \lim_{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} [f(x)-x]$ 0.25

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحني (C_f)بالنسبة إلى (Δ):...............0.5

لدينا : $f(x)-x=-\frac{\ln x}{x}$ بما أن $x>0$ إذن إشارة $f(x)-x$ من إشارة $-\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي ل (C_f) و(Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	يتقاطعان في النقطة$(1;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

ج. نبين أن المنحني (C_f)يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) : معناه $f'(x)=1$ ... 0.25 و منه $\frac{x^2-1+\ln x}{x^2} = 1$

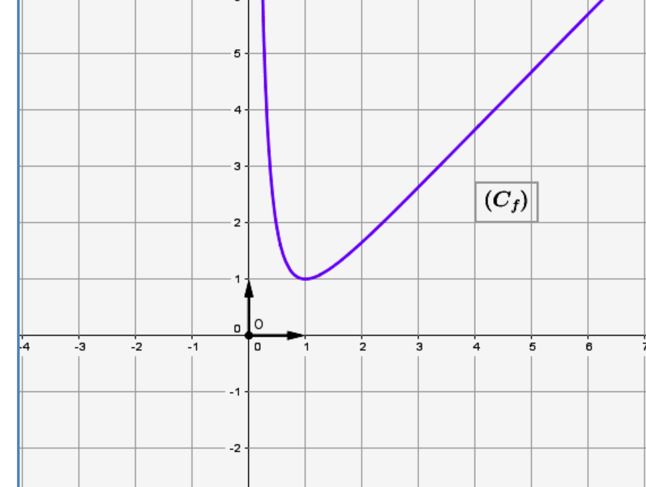
و بالتالي: $x^2-1+\ln x = x^2$ و منه $\ln x = 1$ إذن $x=e$........0.25

كتابة معادلة المماس (T):

$$0.25 \;\dots\dots\dots\; (T): y = f'(e)(x-e) + f(e) = (x-e) + e - \frac{1}{e} = x - \frac{1}{e}$$

4. إنشاء المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f)





5. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ

$$g(x) = x - \frac{\ln|x|}{x}$$

أ. نبين أن الدالة g فردية:

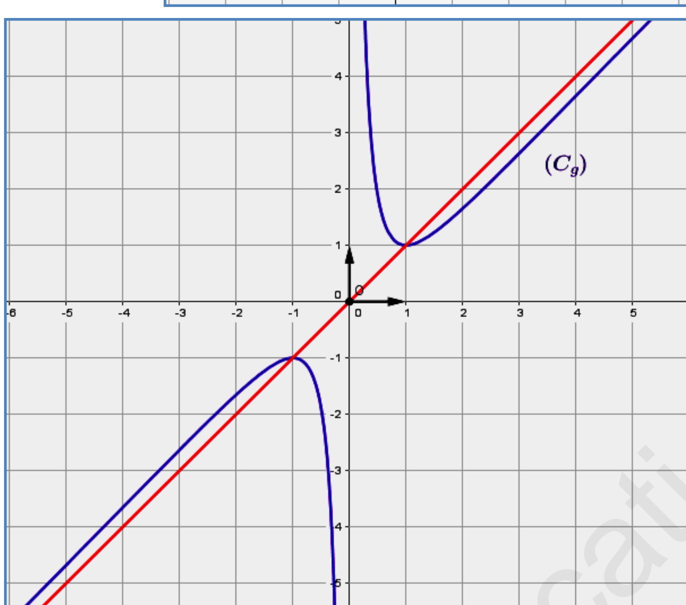
$\mathbb{R}-\{0\}$ متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-x) = -x - \frac{\ln|-x|}{-x} = -x + \frac{\ln|x|}{x}$$

إذن : $g(-x) = -\left(x - \frac{\ln|x|}{x}\right) = -g(x)$

g دالة فردية 0.5

لإنشاء (C_g): 0.5



لدينا (C_g) منطبق على (C_f) على $]0;+\infty[$ و نظير (C_f) بالنسبة للمبدأ O على $]-\infty;0[$

8. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x)=m$ حلين متمايزين .

من التمثيل البياني لـ(C_g) يكون *للمعادلة* $g(x)=m$ حلين متمايزين إذا كان $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$...0.5

7. h الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $h(x) = \frac{x^2-1-\ln(x-1)}{x-1}$

إثبات أن $h(x) = f(x-1)+2$:

$$f(x-1)+2 = (x-1) - \frac{\ln(x-1)}{x-1} + 2 = \frac{(x-1)^2 - \ln(x-1) + 2(x-1)}{x-1} = \frac{x^2-2x+1-\ln(x-1)+2x+2}{x-1}$$

و منه $h(x) = \frac{x^2-1-\ln(x-1)}{x-1} = f(x-1)+2$ 0.5

. شرح كيف يمكن رسم المنحني (C_h) انطلاقا من (C_f) : بما أن $h(x)=f(x-1)+2$ إذن (C_h) هو صورة (C_f)

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$............0.25

انتهى حل الموضوع الثاني

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}$.

1) أ/ احسب كل من u_1، u_2 وَ u_3.

ب/ أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث α عدد حقيقي.

أ/ جِد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2 وكريتان خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة بـ:0.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الأحداث A: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ B: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ C: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) بيّن أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ احسب $P(A)$ وَ $P(C)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

– عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نسحب الآن عشوائيا على التوالي ودون إرجاع أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث D: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"، أحسب $P(D)$.

اقلب الصفحة

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1)أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10.

ب. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n = 2^n$.

أ. تحقّق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية.

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \cdots + 5 + 2^n$.

ب. أوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

1) احسب نهايتي الدّالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $4\,cm$)

1) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$.

2)أ- أثبت أنّ: $f(\alpha) = \alpha + 1$.

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3)أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C_f).

جـ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

4)أ- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

ب- ارسم (D) و (C_f).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، مثّل المستقيم (Δ) وَ (D) اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ وَ $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$.

أ- مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 وَ u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها).

ب- عيّن احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) وَ (D).

جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$، حيث α عدد حقيقي.

أ- جِد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$، أكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ- بيّن أنّ $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د- احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$، ثمّ استنتج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.

نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين في آن واحد.

1/ احسب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي.

2/ احسب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x-y|$ حيث x وَ y رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) ما هي قيم المتغيّر العشوائي X؟

ب) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X، ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E) \ldots 4862x - 1430y = 2002$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862، 1430 وَ 2002.

2) أ. بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E).

3) a وَ b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (E)، نضع: $d = PGCD(a;b)$.

أ. عيّن القيم الممكنة لـ d.

ب. عيّن الثنائيات $(a;b)$ عندما $d = 7$.

اقلب الصفحة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأوّل:

لتكن g الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1) ادرس تغيّرات الدّالة g على $]0;+\infty[$.

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدّالة العددية f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$

نسمي (C) المنحنى المُمثل للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2\ cm$).

1)أ- احسب نهاية الدّالة f عند 0، فسّر هندسيا هذه النتيجة.

ب- احسب نهاية الدّالة f عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D).

2)أ- أثبت أنّه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3)أ- عيّن إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D).

ب- اكتب معادلة للمستقيم (T)، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e. (نُذكّر أنّ e هو العدد الذي يُحقق $\ln e=1$)

4) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$.

5) ارسم المستقيمين (D)، (T) وَالمنحنى (C).

انتهى الموضوع الثاني

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$.

1) أ/ حساب كل من u_1، u_2 وَ u_3:

لدينا: $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}(4) + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$

وَ $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{13}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{13}{4} + \frac{4}{3} = \frac{39+16}{12} = \frac{55}{12}$

وَ $u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{55}{12}\right) + \frac{4}{3} = \frac{55}{16} + \frac{4}{3} = \frac{165+64}{48} = \frac{229}{48}$

ب/ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

نلاحظ أنّ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) فهي **متزايدة تماما**.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث α عدد حقيقي.

أ/ إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ حساب حدّها الأوّل:

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، معناه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$، تُكافئ: $\alpha u_{n+1} - 4(\alpha+1) = \frac{3}{4}v_n$

ومنه: $\alpha\left(\frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}\right) - 4(\alpha+1) = \frac{3}{4}(\alpha u_n - 4(\alpha+1))$

وعليه: $\frac{3}{4}\alpha u_n + \frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = \frac{3}{4}\alpha u_n - 3\alpha - 3$

ومنه: $\frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = -3\alpha - 3$

وعليه: $4\alpha - 12\alpha - 12 = -9\alpha - 9$

ويكون: $-8\alpha + 9\alpha = 12 - 9$

وبالتالي: $\boxed{\alpha = 3}$، (بالتعويض نجد: $v_n = 3u_n - 16$)

حساب الحدّ الأوّل:

$v_n = 3u_n - 16 = 3(4) - 16 = 12 - 16 = -4$

ب/ تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$:

لدينا: $\begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_n = 3u_n - 16 \end{cases}$،

ومنه: $u_n = \frac{v_n+16}{3}$

$= \frac{v_n}{3} + \frac{16}{3}$

$= \frac{16}{3} + \frac{-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3}$

$= \frac{16}{3} - \frac{3^{-1}}{4^{-1}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-1}\right) - \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{16}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1\right)$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right)$

$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$

إذن: (u_n) **متزايدة تماما**.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$،

وبما أنّ: $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$

ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{16}{3}}$.

3) كتابة بدلالة n المجموع S_n حيث، $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 v_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= -4(1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n)$

$= -4[1(n - 0 + 1)]$

$= -4n - 4$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (-4n - 4) = +\infty$$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها أربع **كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2** وثلاث **كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2** وكريتان **خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1** وكرية **وسوداء مرقمة بـ:0**.

عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات في آن واحد من هذا الصندوق هو: $\boxed{C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210}$.

نعتبر الأحداث: A: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ B: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ C: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) تبيان أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ حساب $P(A)$ وَ $P(C)$:

لدينا:

$$P(B)=\frac{C_4^1\times C_3^3+C_4^2\times C_3^2+C_4^3\times C_3^1+C_4^2\times C_2^2+C_4^3\times C_2^1+C_4^3\times C_1^1+C_3^2\times C_2^2+C_3^3\times C_2^1+C_3^3\times C_1^1}{C_{10}^4}$$
$$=\frac{4\times1+6\times3+4\times3+6\times1+4\times2+4\times1+3\times1+1\times2+1\times1}{210}$$
$$=\frac{58}{210}$$
$$=\frac{29}{105}$$

حساب $P(A)$ وَ $P(C)$:

لدينا: $P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^4}=\frac{4\times3\times2\times1}{210}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$

وَ $P(C)=\frac{C_6^1\times C_4^3+C_6^2\times C_4^2+C_6^3\times C_4^1+C_6^4}{C_{10}^4}$
$$=\frac{6\times4+15\times6+20\times4+15}{210}$$
$$=\frac{205}{201}$$
$$=\frac{41}{57}$$

2) **لدينا:** X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

- قيم المتغيّر العشوائي X هي: 1، 2، 3، 4.
- $X=1$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل نفس اللون"

ومنه: $\boxed{P(X=1)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}}$.

$X=2$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"

ومنه: $\boxed{P(X=1)=P(B)=\frac{58}{210}}$.

$X=4$، معناه: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"

ومنه: $\boxed{P(X=1)=P(A)=\frac{24}{210}}$.

$X=3$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل ثلاث ألوان مختلفة"،

ومنه: $\boxed{P(X=3)=1-\left(\frac{1}{210}+\frac{58}{210}+\frac{24}{210}\right)=\frac{127}{210}}$.

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{58}{210}$	$\frac{127}{210}$	$\frac{24}{210}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

لدينا: $E(X)=1\times\frac{1}{210}+2\times\frac{58}{210}+3\times\frac{127}{210}+4\times\frac{24}{210}$
$$=\frac{1+116+381+96}{210}$$
$$=\frac{594}{210}$$
$$=\frac{99}{35}$$

3) عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات على التوالي ودون إرجاع من هذا الصندوق هو:

$$\boxed{A_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=5040}$$

نعتبر الحدث D: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"،

حساب $P(D)$:

لدينا: $\boxed{P(D)=\frac{4\times3\times3\times2}{5040}=\frac{72}{5040}=\frac{1}{70}}$.

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10:

لدينا: $2^0\equiv\mathbf{1}[10]$،
$2^1\equiv\mathbf{2}[10]$،
$2^2\equiv\mathbf{4}[10]$،
$2^3\equiv\mathbf{8}[10]$،
$2^4\equiv\mathbf{6}[10]$،
$2^5\equiv\mathbf{2}[10]$،

ومنه: بواقي قسمة 2^n على 10 تُشكل متتالية دورية، دورها 5 وبالتالي:

$k\in\mathbb{N}^*$	$5k+3$	$5k+2$	$5k+1$	$5k$	$n=$
$[10]$	6	8	4	2	$2^n\equiv$

ب. استنتاج رقم أحاد العدد 1994^{1414}:

لدينا: $1994\equiv4[10]$ أي: $1994\equiv2^2[10]$

ومنه: $1994^{1414}\equiv2^{2828}[10]$

وبمأنّ: $2828=5(565)+3$، فإنّ:

$$\boxed{1994^{1414}\equiv6[10]}$$

إذن: رقم أحاد العدد 1994^{1414} هو 6.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n=2^n$.

أ. التحقق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية:

لدينا: $u_{n+1}=2^{n+1}=2\times2^n=2u_n$،

إذن: (u_n) متتالية هندسية.

ب. لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$S_n=5+2^1+5+2^2+\cdots+5+2^n$.

إيجاد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10:

أولا نكتب S_n بدلالة n:

$$S_n=(5+2^1)+(5+2^2)+\cdots+(5+2^n)$$
$$=5(n-1+1)+(u_1+u_2+\cdots+u_n)$$
$$=5n+u_1\left(\frac{1-2^{n-1+1}}{1-2}\right)$$
$$=5n+2\left(\frac{1-2^n}{-1}\right)$$
$$=5n+2(2^n-1)$$

S_n يقبل القسمة على 10، معناه: $S_n\equiv0[10]$

أي: $5n+2(2^n-1)\equiv0[10]$

$k\in\mathbb{N}^*$	$5k+3$	$5k+2$	$5k+1$	$5k$	$n=$
$[10]$	6	8	4	2	$2^n\equiv$
$[10]$	0	5	0	5	$5n\equiv$
$[10]$	0	9	6	7	$S_n\equiv$

إذن: $\boxed{n=5k+3}$، (حيث $k\in\mathbb{N}^*$)

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- g دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x+x+1$.

1) حساب نهايتي الدّالّة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty}$.

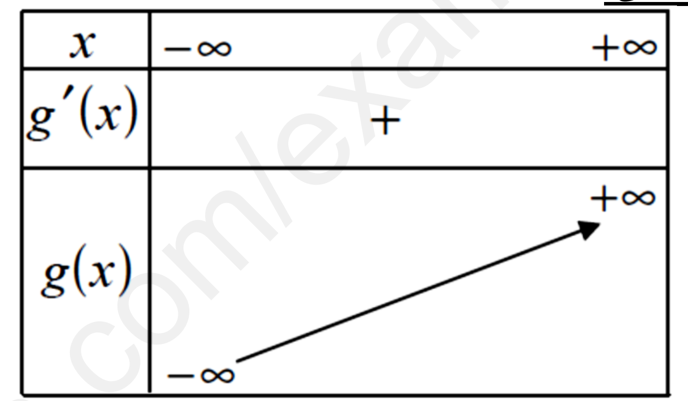
ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$

2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالّة g ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$\boxed{g'(x)=e^x+1>0}$،

ومنه: الدّالّة g **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**



3) إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28<\alpha<-1,27$:

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1,28;-1,27[$

(لأنّها: متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

ولدينا: $\begin{cases}g(-1,28)\simeq-0,56\\ g(-1,27)\simeq+0,01\end{cases}$، أي: $g(-1,28)\times g(-1,27)<0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,28<\alpha<-1,27$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

بمأنّ: g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وَ $g(\alpha)=0$، فإنّ:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II- f دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $4\ cm$)

1) إثبات أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$:

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(xe^x)'(e^x+1)-(e^x+1)'(xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{(1\times e^x+e^x\times x)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x(x+1)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(xe^x+x+e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^xg(x)}{(e^x+1)^2}$$

2) أ- إثبات أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$:

لدينا: من السؤال I-3)، $g(\alpha)=0$

أي: $e^\alpha+\alpha+1=0$ ومنه: $e^\alpha=-\alpha-1$

وبالتعويض نجد:

$$\boxed{f(\alpha)=\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha}=\alpha+1}$$

ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا: $-1,28<\alpha<-1,27$

ومنه: $-0,28<\alpha+1<-0,27$

إذن: $\boxed{-0,28<f(\alpha)<-0,27}$.

3) أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}=\dfrac{xe^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$

نعلم أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)=1$ نستنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+\frac{1}{e^x}}\right)=+\infty$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

ب- تبيان أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f):

لدينا: $f(x)-x=\dfrac{-x}{e^x+1}=\dfrac{-x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}$

وبمأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ، فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}\right)=0$$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x}{e^x+1}\right)=+\infty$

نستنتج أنّ: المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

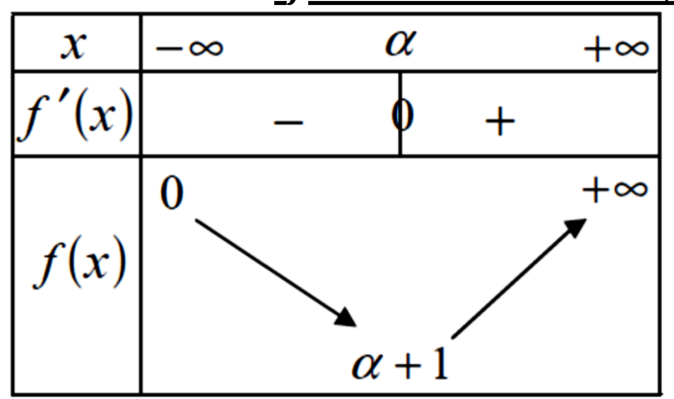
جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$.

لدينا: $f(x)-x=\dfrac{-x}{e^x+1}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $(-x)$ على $\mathbb{R}$، وعليه:

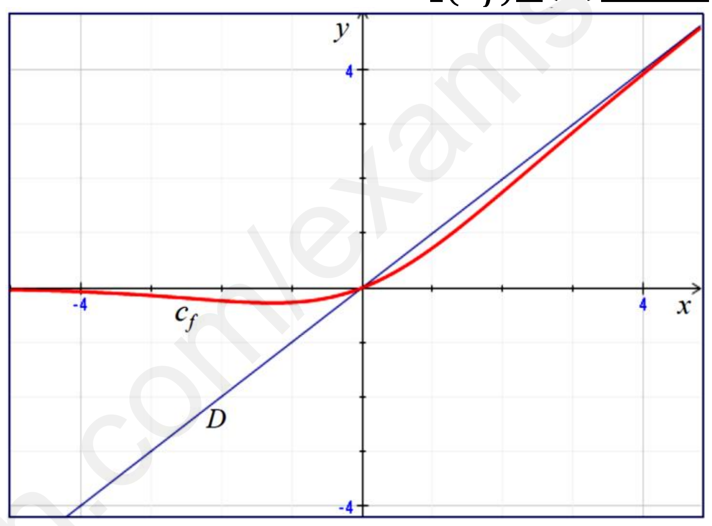
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$f(x)-x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) يقع تحت (D)

4)أ- تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f:



x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$\alpha+1$	↗ $+\infty$

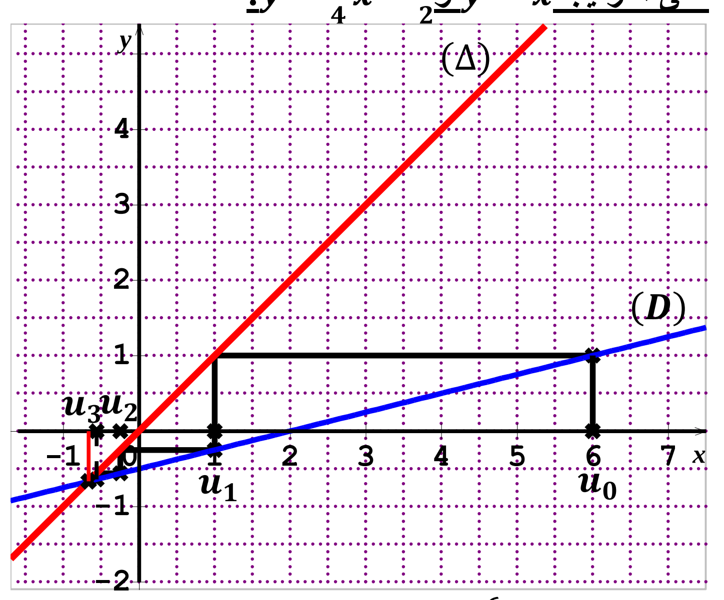
ب- رسم (D) و (C_f):



حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، **تمثيل المستقيم (Δ) وَ (D) اللّذين معادلتيهما على الترتيب $y = x$ وَ $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$:**



لدينا: $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$.

أ- تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 وَ u_3 (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها):

ب- تعيين احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) وَ (D):

نحل المعادلة $x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$، ومنه: $4x = x - 2$

وعليه: $x = -\frac{2}{3}$،

إذن: (Δ) و (D) يتقاطعان في نقطة إحداثييها $\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

جـ- إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها:

نلاحظ أنّ: $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها فهي **متناقصة تماما وتتقارب نحو العدد $-\frac{2}{3}$**.

2) لدينا: (v_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n + \alpha$، حيث α عدد حقيقي.

أ- إيجاد العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل:

⮌ لدينا:
$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$$
$$= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha$$
$$= \frac{1}{4}(v_n - \alpha) - \frac{1}{2} + \alpha$$
$$= \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2} + \alpha$$

⮌ تكون (v_n) متتالية هندسية،

إذا وفقط إذا كان: $-\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2} + \alpha = 0$

ومنه: $-\alpha - 2 + 4\alpha = 0$

وعليه: $3\alpha = 2$

وبالتالي: $\boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$، (بالتعويض نجد: $v_n = u_n + \frac{2}{3}$)

إذن: في حالة $\alpha = \frac{2}{3}$، تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدّها الأوّل $v_0 = u_0 + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.

ب- نضع $\alpha = \frac{2}{3}$، كتابة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $\boxed{v_n = v_0 \times q^n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$،

ومنه: $\boxed{u_n = v_n - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}}$.

جـ- تبيان أنّ $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left[\frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{2}{3}\right] - \left[\frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}\right]$
$$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{3} - \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$
$$= \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{-3}{4}\right)$$
$$= -5\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n):

بمأنّ: $u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{4}\right)^n < 0$،

فإنّ: (u_n) متناقصة تماما.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}$،

وبمأنّ: $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{2}{3}}$.

د-حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$= v_0 \left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right)$

$= \frac{20}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$

$= \frac{20}{3} \times \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

$= \frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

استنتاج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$= \left(v_0 - \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 - \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(v_n - \frac{2}{3}\right)$

$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - \frac{2}{3}(n - 0 + 1)$

$= S_n - \frac{2}{3}(n+1)$

$= \frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{2}{3}(n+1)$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.

عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين في آن واحد من هذا الكيس هو: $\boxed{C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28}$.

1/ حساب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي:

ليكن الحدث A: "سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي"

ومنه: $\boxed{P(A) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}}$.

2/ حساب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي:

ليكن الحدث B: "سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي"

ومنه: $\boxed{P(B) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}}$.

3/ لدينا: X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x-y|$ حيث x وَ y رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) قيم المتغيّر العشوائي X هي: 0، 1، 3، وَ 4.

ب) تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي X، ثمّ حساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

- $X = 0$، معناه: "سحب كريتين تحملان نفس الرقم (الكريتين تحملان الرقم 1 أو تحملان الرقم 2)"

ومنه: $\boxed{P(X=0) = \frac{C_4^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{6+3}{28} = \frac{9}{28}}$.

$X = 1$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 2"

ومنه: $\boxed{P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{4\times 3}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}}$.

$X = 3$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 2 وَالأخرى تحمل الرقم 5"

ومنه: $\boxed{P(X=3) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3\times 1}{28} = \frac{3}{28}}$.

$X = 4$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 5"،

ومنه: $\boxed{P(X=4) = \frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{4\times 1}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}}$.

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

لدينا: $E(X) = 0 \times \frac{9}{28} + 1 \times \frac{12}{28} + 3 \times \frac{3}{28} + 4 \times \frac{4}{28}$

$= \frac{0+12+9+16}{28}$

$= \frac{37}{28}$

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا المعادلة: $4862x - 1430y = 2002 \ldots (E)$

حيث x و y عدادن صحيحان.

1) حساب القاسم المشترك الأكبر للأعداد 4862، 1430 وَ 2002:

لدينا: $\begin{cases} 4862 = 2 \times 11 \times 13 \times 17 \\ 1430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13 \\ 2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13 \end{cases}$، ومنه:

$\boxed{PGCD(4862; 1430; 2002) = 2 \times 11 \times 13 = 286}$.

2)أ. تبيان أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

- (E) تُكافئ: $17x - 5y = 7$
- بمأنّ: 17 أولي مع 5،

فإنّه: توجد ثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ تُحقّق $17x - 5y = 1$،

وبضرب الطرفين في 7، نجد:

$17X - 5Y = 7$ (حيث $X = 7x$ وَ $Y = 7y$)،

إذن: (E) **تقبل حلولا** في $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة (E):

إيجاد حل خاص لـ(E):

نلاحظ أنّ: $7 = 17 \times 1 - 5 \times 2$، إذن: الثنائية $(1;2)$ حل خاص لـ(E).

حل المعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases} 17x - 5y = 7 & \ldots (1) \\ 17(1) - 5(2) = 7 & \ldots (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $17(x-1) - 5(y-2) = 0$

وعليه: $17(x-1) = 5(y-2)$

ومنه: 5 يقسم $17(x-1)$ وَ 5 أولي مع 17

إذن: حسب مبرهنة **غوص**؛ 5 **يقسم** $(x-1)$

أي: يوجد عدد صحيح k، حيث $x-1=5k$

وبالتالي: $\boxed{x=5k+1}$.

بالتعويض نجد: $\boxed{y=17k+2}$.

إذن: $\boxed{(x;y)=(5k+1;17k+2)}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$).

3) a وَ b عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة (E)،

نضع: $d=PGCD(a;b)$.

أ. تعيين القيم الممكنة لـd:

لدينا: $d=PGCD(a;b)$، ومنه: $d|a$ و $d|b$

وعليه: $d|17a-5b$

أي: $d|7$

وهذا يعني أنّ: $d\in D_7$

إذن: $\boxed{d\in\{1;7\}}$

ب. تعيين الثنائيات $(a;b)$ عندما $d=7$:

$\boxed{(a;b)=(35k+7;119k+14)}$ (حيث $k\in\mathbb{N}$).

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأوّل:

لدينا: g دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x)=1-x^2-\ln x$.

1) دراسة تغيّرات الدّالّة g على $]0;+\infty[$:

⮌ النهايات:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(1-x^2)=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ln x=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}g(x)=+\infty}$.

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty}$.

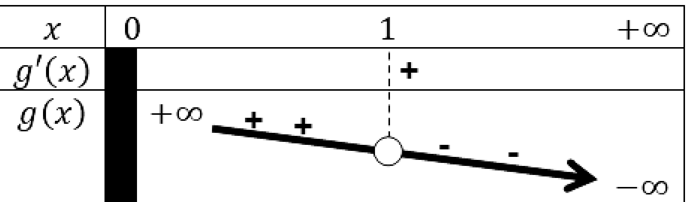
⮌ اتجاه التغيّر:

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{g'(x)=-2x-\frac{1}{x}=-\frac{2x^2+1}{x}<0}$.

ومنه: الدّالّة g **متناقصة تماما** على $]0;+\infty[$.

⮌ جدول التغيّرات:



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			-		
$g(x)$		$+\infty$	0		$-\infty$

2) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$:

لدينا: $g(1)=1-(1)^2-\ln 1=0$،

وبمأنّ: g **متناقصة تماما** على المجال $]0;+\infty[$، فإنّ:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

الجزء الثاني:

لدينا: f دالّة عددية معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$$

(C) المنحنى المُمثل للدّالّة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $2\ cm$).

1)أ- حساب نهاية الدّالّة f عند 0، وتفسير هندسيا النتيجة:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}x=0^+\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=-\infty}$.

وتفسيرها الهندسي هو: المنحنى (C) يقبل محور التراتيب كمُقارب له.

ب- حساب نهاية الدّالّة f عند $+\infty$:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$.

جـ- تبيان أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

نستنتج أنّ: المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+2$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

د- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$.

لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$ من إشارة $\ln x$ على $]0;+\infty[$،

وعليه:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	
$f(x)-(-x+2)$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C) يقع تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)	

2)أ- إثبات أنّه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

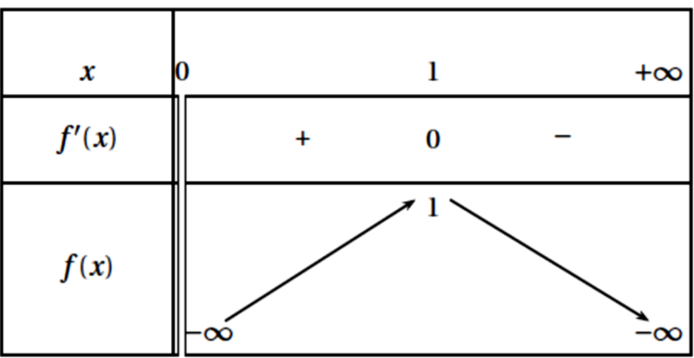
f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}}$

ب- استنتاج اتجاه تغيّر الدّالّة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

على المجال $]0;+\infty[$، $x^2>0$ إذن: إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $g(x)$.

وبالتالي: f **متزايدة تماما** على المجال $]0;1]$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[1;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**



x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

3)أ- تعيين إحداثيي النقطة A من (C) التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم (D):

نضع: $f'(x)=-1$، نجد: $\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=-1$

ومنه: $1-\ln x-x^2=-x^2$

وعليه: $1-\ln x=0$

ومنه: $\ln x=1$

وبالتالي: $x=e$

وبمأنّ: $f(e)=\frac{\ln e}{e}-e+2=\frac{1}{e}+2-e$

فإنّ: $\boxed{A\left(e;\frac{1}{e}+2-e\right)}$

ب- كتابة معادلة للمستقيم (T)، مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة e:

معادلة (T) من الشكل $y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه: $y=-(x-e)+\frac{1}{e}+2-e$،

نجد: $\boxed{(T):y=-x+\frac{1}{e}+2}$.

4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$:

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)=-\infty\\ f(1)=1\end{cases}$، أي: $0\in]-\infty;1[$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0;1[$.

5) رسم المستقيمين (D)، (T) وَالمنحنى (C):

انتهى ــــــــــــــ مُحبكم في الله أستاذ المادة ـــــــــ بالتوفيق في بكالوريا دورة جوان 2021.

تمرين محلول 12 : (Bac Métropole juin 2007)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

(c)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;+\infty[$.

2) من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، نضع : $g(x)=(x+1)^2-1+\ln(x+1)$

- تحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- احسب $g(0)$. استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) ادرس الوضع النسبي للمنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

4) ارسم المستقيم (D) والمنحنى (c) .

الحل :

1) حساب $f'(x)$: $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=(x)'-\frac{[\ln(x+1)]'\times(x+1)-(x+1)'\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

إذن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

2) التحقق أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$:

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

اذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ و $(x+1)^2>0$

وبالتالي: $\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}>0$ أي : $g'(x)>0$

إذن : الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- حساب $g(0)$: $g(0)=(0+1)^2-1+\ln(0+1)=0$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا : الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $g(0)=0$

نستنتج أن : $[g(x)=0]$ يكافئ $[x=0]$

$[g(x)>0]$ يكافئ $[x\in]0;+\infty[]$

$[f(x)<0]$ يكافئ $[x\in]-1;0[]$

لكن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه النتيجة التالية :

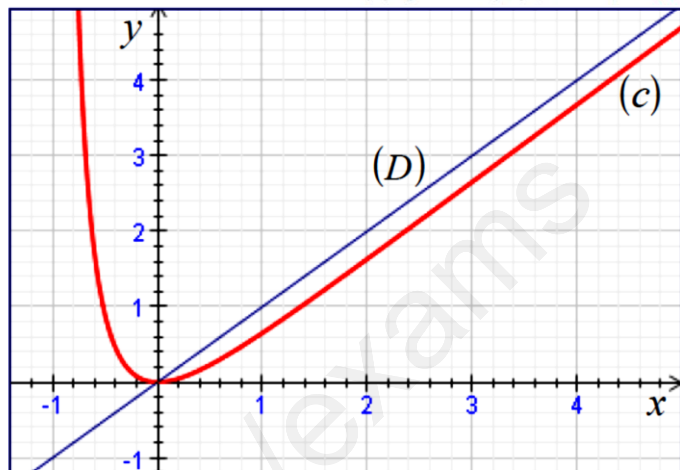
الدالة f متناقصة على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$

3) دراسة الوضع النسبي للمنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D) :

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f(x)-x=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $-\ln(x+1)$.

• $[-\ln(x+1)=0]$ يكافئ $[\ln(x+1)=0]$ ومنه : $\ln(x+1)=\ln 1$
وبالتالي : $(x+1)=1$ إذن : $x=0$
في هذه الحالة : المستقيم (D) يقطع المنحني (c) في النقطة $O(0;0)$.
• $[-\ln(x+1)>0]$ يكافئ $[\ln(x+1)<0]$ ومنه : $\ln(x+1)<\ln 1$
وبالتالي : $(x+1)<1$ إذن : $x<0$ أي : $x\in]-1;0[$
في هذه الحالة : المنحني (c) يقع فوق المستقيم (D).
• $[-\ln(x+1)<0]$ يكافئ $[x\in]0;+\infty[]$
في هذه الحالة : المنحني (c) يقع تحت المستقيم (D).
4) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :

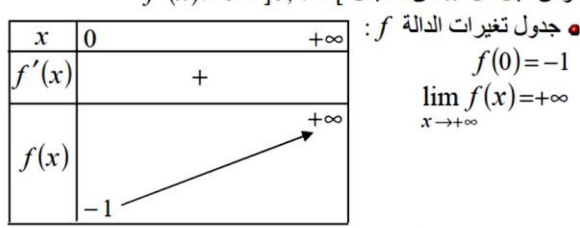


تمرين محلول 13 : (بكالوريا المغرب 2008 الشعبة : رياضيات الدورة العادية)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :
$f(x)=2x-e^{-x^2}$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1) أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .
ب- احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$.
د- ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$.
2) أنشئ المنحني (c). (نأخذ : $\alpha\approx 0.4$)

الحل :

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x^2}\right)=0$
• التفسير الهندسي :
تذكير : إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.
بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $+\infty$.
ب- حساب $f'(x)$:
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=2+2xe^{-x^2}$
ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$
• جدول تغيرات الدالة f :
$f(0)=-1$
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$



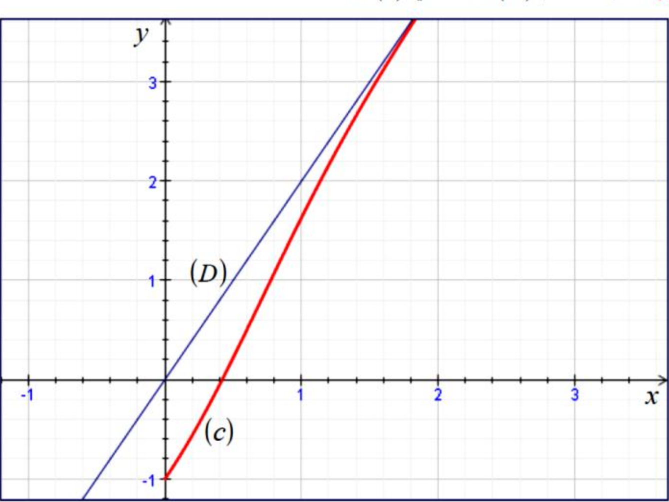
x	0 $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$

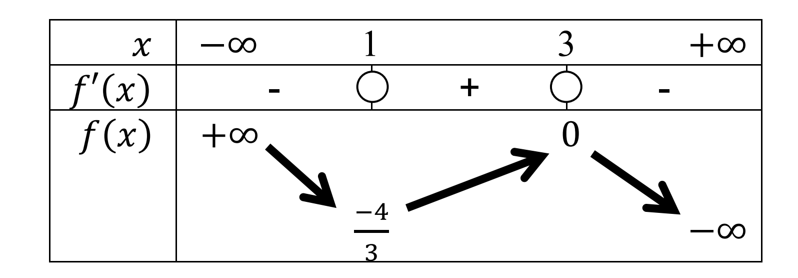
جـ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$:

تذكير : إذا كان : • f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛
• f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛
• $f(a)\cdot f(b)<0$.
فإنه ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.
- من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$
وبالتالي فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$.
- زيادة على ذلك ، نتحقق بسهولة أن : $f(0)\times f(1)<0$.
من هذه الحالات الثلاثة (الاستمرارية ، الرتابة والجداء سالب) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α مع $0<\alpha<1$.
د- دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$: $[f(x)=0]$ يكافئ $[x=\alpha]$
$[f(x)>0]$ يكافئ $[x\in]\alpha;1]]$ و $[f(x)<0]$ يكافئ $[x\in[0;\alpha[]$

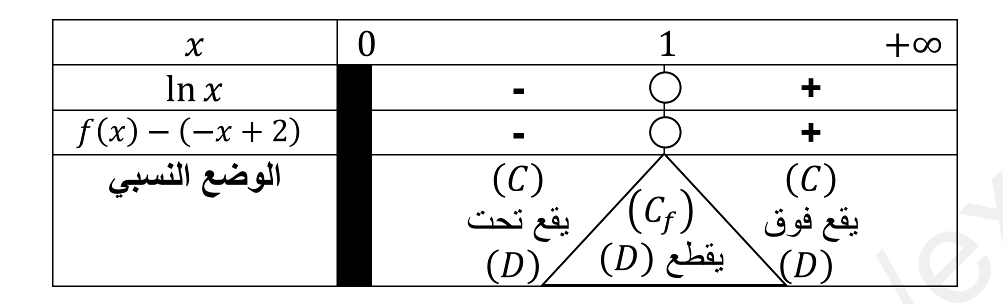
x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2) رسم المستقيم (D) والمنحني (c) :



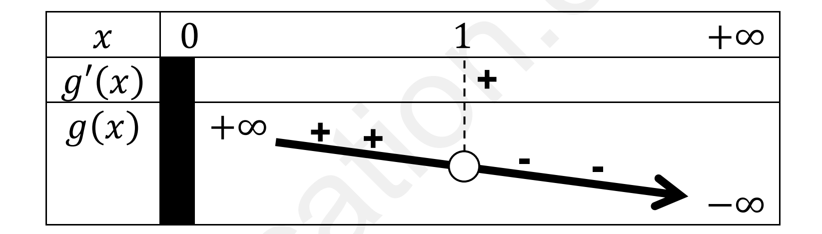


x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{-4}{3}$	↗	0	↘	$-\infty$



x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+	
$f(x)-(-x+2)$	‖	-	0	+	
الوضع النسبي	‖	(C) يقع تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)	

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	-	



x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		+		
$g(x)$	‖ $+\infty$	+ + ↘	0	- - ↘	$-\infty$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الوطـــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال و التحضيـــر
مديرية مدارس أشبال الأمـــة

السنة الدراسية : 2020 / 2021
دورة جوان 2021

امتحان البكـــالوريـــا التجريـــــــبـــي
الشعبة: رياضيات

اختبار مادة الرياضيات — المـــــدة : 04 ساعات و نصف

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر v_1 و q عددان طبيعيان ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1.

I) عين v_1 و q علما أن v_1 و q أوليان فيما بينهما و $2v_1^2 = v_4 - v_2$.

II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.

1) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين: 2020 و 1441.

2) نضع: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$.

– أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

3) نعتبر α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

أ) حلل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين كل الثنائيات الطبيعية (α, β) بحيث يكون: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$.

ج) نسجل قيم الحدود السته الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في آن واحد.

– ما هو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب) استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7.

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + ... + 1) \equiv 3[7]$.

3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7.

4) فيما يلي نفرض: $n = 9$.

نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة (E) حيث: $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 .....(E)$.

أ) عين $PGCD(C_{10}^2 ; A_{12}^2)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x, y).

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E).

5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ما هي القيم الممكنة لـــ d حيث: $d = PGCD(x, y)$.

ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث يكونا العددين x و y أوليان فيما بينهما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين M و M' التين لاحقتاهما z و z' على الترتيب . نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية .

نذكر أن $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z و $|z|$ هي طويلة العدد المركب z .

1) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\text{Re}(z'\overline{z})=0$.

2) بين أن النقط O ، M و M' في استقامية إذا وفقط إذا كان $IM(z'\overline{z})=0$.

3) لتكن N النقطة ذات اللاحقة z^2-1 . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين .

4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$.

أ) بين أن $\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2 \overline{z}^{-2}=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)$.

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها النقط O ، N و P في استقامية .

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=x^2-\ln(x^2)$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ تكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذوالمعادلة $y=x$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـــ(Δ).

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}3<\alpha<0{,}4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.

4) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f).

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

– بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h). (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $F(x)=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}(\ln x^2)^2+2\ln|x|\right]$ هي دالة أصلية لـــ f على $\mathbb{R}^*$.

ب) عين دالة أصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$. أحسب التكامل: $I=\int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون إرجاع .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب.

2) أحسب احتمال سحب كريتان من نفس اللون .

3) أحسب احتمال سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان .

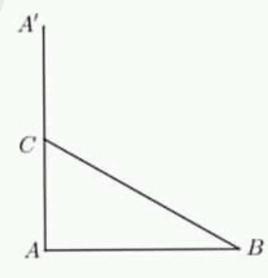
4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I . ABC مثلث مباشر قائم في A حيث $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ (أنظر الشكل)



A' نظيرة A بالنسبة للنقطة C. ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A' إلى C و C إلى B.

1)عين نسبة وزاوية التشابه S.

2)أنشئ D صورة A بواسطة S.

3)ليكن Ω مركز التشابه المباشر S.

أ) أثبت أن المستقيمين (ΩC) و (BC) متعامدان.

ب) أثبت أن المستقيمين $(\Omega A')$ و (CA') متعامدان.

ج) استنتج طريقة لإنشاء النقطة Ω.

II . فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث لاحقة B هي 1.

1) عين لاحقة كل من C و A'.

2) بين أن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج لاحقة Ω.

3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

التمرن الثالث: (05 نقاط)

متتاليتا الأعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع من أجل كل طبيعي n أن $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) أ) احسب $\text{pgcd}(x_2; x_3)$ و $\text{pgcd}(x_8; x_9)$

ب) هل x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل طبيعي n.

3) أ) أثبت من أجل كل طبيعي n أن $2x_n - y_n = 5$.

ب) أكتب y_n بدلالة n.

ج) أدرس حسب قيم الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

4) نضع $d_n = \text{pgcd}(x_n; y_n)$.

أ) ما هي القيم الممكنة لـــــــــ d_n.

ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من أجلها x_n و y_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـــــــ : $g(x) = e^x(x-1) + 1$

1)أدرس تغيرات g ثم أنجز جدول تغيراتها.

2)استنتج أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II.لتكن الدالة العددية I المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $I(x) = \int_0^x (x-t)e^t \, dt$

1)أثبت بواسطة مكاملة بالتجزئة أن: $I(x) = e^x - (1+x)$

2) ليكن x عدد حقيقي موجب . أثبت من أجل كل t من $[0;x]$ أن: $1 \leq e^t \leq e^x$.

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$.

3) ليكن x عدد حقيقي سالب. أثبت من أجل كل t من $[x;0]$ أن: $e^x \leq e^t \leq 1$، ثم استنتج أن: $\frac{x^2 e^x}{2} \leq I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

III. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بــــــ : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0.

3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f.

4) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) أرسم (T) و (C_f).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	I) تعيين العددين v_1 و q: لدينا: $2v_1^2 = v_4 - v_2$ و نعلم أن: $v_2 = v_1.q$ و $v_4 = v_1.q^3$ أي تصبح: $2v_1^2 = v_1.q^3 - v_1.q$ أي: $2v_1^2 = v_1.q(q^2-1)$ ومنه: $\boxed{2v_1 = q(q^2-1)}$. لدينا: q يقسم $2v_1$ و q أولي مع v_1 إذن: q يقسم 2 (حسب مبرهنة غوص) أي أن: $q \in \{1,2\}$. - في حالة $q=1$ يكون: $2v_1 = 0$ أي: $v_1 = 0$ (مرفوض). - في حالة $q=2$ يكون: $2v_1 = 6$ أي: $v_1 = 3$. إذن نتحصل على: $\boxed{q=2}$ و $\boxed{v_1=3}$.	0.75 ن	04.5 ن
	II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$. 1) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n): نعلم أن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $\boxed{v_n = 3\times 2^{n-1}}$.	0.25 ن	
	*) تعيين كل الحدود المحصورة بين 2020 و 1441: لدينا: $1441 \le 3\times 2^{n-1} \le 2020$ أي: $481 \le 2^{n-1} \le 673$ أي نجد: $\ln 481 \le \ln 2^{n-1} \le \ln 673$ أي: $\ln 481 \le (n-1)\ln 2 \le \ln 673$ و منه: $\frac{\ln 481}{\ln 2} \le n-1 \le \frac{\ln 673}{\ln 2}$ أي: $8{,}9 \le n-1 \le 9{,}39$ ومنه: $9{,}9 \le n \le 10{,}39$ ، إذن: $\boxed{n=10}$ وبالتالي يوجد حد وحيد محصور بين العددين 2020 و 1441 هو : $\boxed{v_{10} = 1536}$	0.75 ن	
	2) لدينا: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$. المجموع S_n هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1^2 وعدد حدودها n حدا. أي يكون: $S_n = v_1^2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = 9\times\frac{1-(4)^n}{1-4}$ ومنه: $\boxed{S_n = 3(4^n - 1)}$.	01 ن	
	*) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[3(4^n-1)\right] = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.		

*) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} P_n$: $\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(S_n) = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. — 0.25 ن

3) لدينا: α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$. — 0.25 ن

أ) تحليل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على: $\boxed{2304 = 2^8 \times 3^2}$. — 0.25 ن

ب) تعيين كل الثنائيات (α,β):

لدينا: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ أي يكون: $\begin{cases} (3\times 2^{\alpha-1})(3\times 2^{\beta-1}) = 2^8\times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta)=2 \end{cases}$ ومنه:

$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta-2}\times 3^2 = 2^8\times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta)=2 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} \alpha+\beta=10 \\ PGCD(\alpha,\beta)=2 \end{cases}$. لدينا: $\alpha = 2\alpha'$ و $\beta = 2\beta'$ و منه: $2\alpha'+2\beta'=10$ أي نجد:

$\boxed{\alpha'+\beta'=5}$.

لكن لدينا: $\alpha<\beta$ لأن: $v_\alpha < v_\beta$ (المتتالية) (v_n) متزايدة) ومنه يكون: $\alpha'<\beta'$.

أي نجد أن هناك ثنائيتان تحقق: $(\alpha',\beta')=(1,4)$ و $(\alpha',\beta')=(2,3)$.

إذن الثنائيات (α,β) المطلوبة هي: $\boxed{(\alpha,\beta)=(2,8)}$ و $\boxed{(\alpha,\beta)=(4,6)}$. — 0.5 ن

4) الأعداد المسجلة على البطاقات الست هي: 3 ، 6 ، 12 ، 24 ، 48 ، 96.

نلاحظ أنه توجد بطاقة وحيدة تحمل حدا رقميه أوليان فيما بينهما و هو v_3.

لكن السحب هنا يتم دفعة واحدة وفي هذا الأخير لا يوجد تكرار أي ليس باستطاعتنا سحب البطاقة التي تحمل الحد v_3 مرتين في آن واحد إذن هذا حدث مستحيل واحتماله يساوي 0. — 0.5 ن

التمرين الثاني — 04 ن

1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7.

نجد: $5^0\equiv 1[7]$ ، $5^1\equiv 5[7]$ ، $5^2\equiv 4[7]$ ، $5^3\equiv 6[7]$ ، $5^4\equiv 2[7]$ ، $5^5\equiv 3[7]$ و $5^6\equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي:

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

— 0.5 ن

ب) نعلم أن: $1440\equiv 5[7]$ أي أن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{(2019)^{2020}}[7]$. — 0.25 ن

*) لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6: $2019\equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020}\equiv 3^{2020}[6]$

لكن نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $\boxed{3^n\equiv 3[6]}$ و منه: $2019^{2020}\equiv 3[6]$ أي:

$2019^{2020}=6k+3$.

إذن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{6k+3}[7]$ أي: $1440^{(2019)^{2020}}\equiv 6[7]$.

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6. — 0.25 ن

2) لدينا: $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)\equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن: $\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)$

هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حدا و منه:

$4\left(1\times\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}-1\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}\equiv 4[7]$

ومنه يكون: $n-1=6k+2$ إذن: $\boxed{n=6k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. — 0.5 ن

3) أ) لنبين أن: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^{2}+6n+6$.

*) لنحسب $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}$:

$$2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2\times\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\times 2!}+\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}$$
$$=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

و منه: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=(n+1)n+(n+3)(n+2)=n^{2}+n+n^{2}+2n+3n+6$

إذن: $\boxed{2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}=2n^{2}+6n+6}$ هو المطلوب. — 0.5 ن

ب) لنعين قيم n بحيث يكون: $2C_{n+1}^{2}+A_{n+3}^{2}\equiv 0[7]$.

لدينا: $2n^{2}+6n+6\equiv 0[7]$ أي: $2\left(n^{2}+3n+3\right)\equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون:

$n^{2}+3n+3\equiv 0[7]$ أي: $n^{2}+3n\equiv -3[7]$ و منه: $n^{2}+3n\equiv 4[7]$.

يمكن الاستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7):

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^{2}\equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$3n\equiv$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
$n^{2}+3n\equiv$	0	4	3	4	0	5	5	[7]

وبالتالي يكون: $n\equiv 1[7]$ أو $n\equiv 3[7]$ أي: $\boxed{n=7k+1}$ أو $\boxed{n=7k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. — 0.75 ن

4) لدينا: $C_{10}^{2}x-A_{12}^{2}y=15\ .....(E)$.

أ) لنعين $PGCD\left(C_{10}^{2};A_{12}^{2}\right)$:

نعلم أن: $C_{10}^{2}=\frac{10!}{8!\times 2!}=45$ و $A_{12}^{2}=\frac{12!}{10!}=132$ ومنه $PGCD\left(C_{10}^{2};A_{12}^{2}\right)=3$.

إذن المعادلة (E) تصبح: $45x-132y=15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^{2}$ لأن: $PGCD(45,132)=3$ و 3 يقسم 15. — 0.25 ن

ب) لدينا: $45x-132y=15$ أي تصبح: $15x-44y=5$ أي: $44y=15x-5$ أي:

$44y=5(3x-1)$

لدينا: 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غـوص فإن: 5 يقسم y

وبالتالي يكون: $y=5k$ أي: $\boxed{y\equiv 0[5]}$ هو المطلوب.

*) لنحل المعادلة (E): — 0.25 ن

نبحث أولا عن الحل الخاص أي: $y=5$ و منه: $44\times 5=5(3x-1)$ أي: $44=3x-1$ إذن:

		$x=15$. ومنه: $(x_0,y_0)=(5,15)$.	
		لدينا: $\begin{cases}15x-44y=5\\ 15(15)-44(5)=5\end{cases}$ بالطرح نجد: $15(x-15)=44(y-5)$ بما أن 15 أولي مع 44	
		وحسب مبرهنة غوص نستنتج أن: $\begin{cases}x-15=44k\\ y-5=15k\end{cases}$ إذن: $\boxed{x=44k+15}$ و $\boxed{y=15k+5}$.	
		ومنه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.	
	0.25 ن	5) أ) لدينا الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E) أي يكون: $15x-44y=5$ و بما أن:	
	0.25 ن	$PGCD(x,y)=d$ فإن: d يقسم $(15x-44y)$ و d يقسم 5 ، إذن قيم d هي: 1 ، 5.	
		ب) لندرس حالة $d=5$ أي: $x\equiv 0[5]$ أي: $44k+15\equiv 0[5]$ أي: $4k\equiv 0[5]$ و منه:	
		$k\equiv 0[5]$	
		أي يكون: $\boxed{k=5\alpha}$ مع $(\alpha\in\mathbb{Z})$.	
	0.25 ن	إذن: $d=5$ لما $k=5\alpha$ و بالتالي يكون: $d=1$ لما $k\neq 5\alpha$	التمرين الثالث
04 ن		و منه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\neq 5\alpha)$.	
		1) لدينا : $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM}'(x';y')$ متعامدين معناه $xx'+yy'=0$.	
	0.75 ن	$z'\overline{z}=(x'+iy').(x-iy)=(xx'+yy')+i(xy'-yx')$.	
		ومنه : $xx'+yy'=0$ تكافئ $\text{Re}(z'\overline{z})=0$.	
		2) النقط O ، M و M' في استقامية معناه $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM}'(x';y')$ مرتبطان	
	0.75 ن	خطيا أي $xy'+yx'=0$ وهذا يكافئ $IM(z'\overline{z})=0$.	
		3) لدينا : $(z^2-1)\overline{z}=\|z\|z-\overline{z}=(x^2+y^2)(x+iy)-(x-iy)$	
		$=x(x^2+y^2-1)+iy(x^2+y^2+1)$	
	01ن	$\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين يكافئ $\text{Re}((z^2-1)\overline{z})=0$ أي $x(x^2+y^2-1)$ ومنه $x=0$ أو	
		$x^2+y^2=1$.	
		مجموعة النقط M هي اتحاد محور التراتيب مع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1	
		4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$.	
	0.75 ن	أ) $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(-\overline{z}^2\right)\left(\overline{\frac{1}{z^2}-1}\right)=-\overline{z}^2\left\|\frac{1}{z^2}-1\right\|^2$.	
		ب) O ، N و P في استقامية تكافئ $IM\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right)=0$ أي	
	0.75 ن	$IM\left(-\overline{z}^2\left\|\frac{1}{z^2}-1\right\|^2\right)=0$.أي $IM\left(-\overline{z}^2\right)=0$ ومنه $2xy=0$ أي $x=0$ أو $y=0$.	التمرين الرابع
07.5 ن		ومجموعة النقط M هي اتحاد محور الفواصل مع محور التراتيب باستثناء المبدأ O .	

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $g(x)=x^2-\ln(x^2)$. 1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها: *) الدالة المشتقة: الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و عبارة دالتها المشتقة هي: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$. نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x.(2x^2-2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي: إذن جدول التغيرات يكون:	0.5 ن	

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$2x^2-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

0.25 ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

0.75 ن

*) النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\underset{>}{\to}} 0}g(x)=+\infty$. 0.25 ن

2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$.

1) أ) حساب النهايات:

*) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\frac{2}{x^2}+1+\frac{\ln(x^2)}{x^2}\right)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2}=0$

فبوضع: $x^2=t$

هذه الأخيرة تصبح: $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0}$. 0.5 ن

*) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

ب) حساب النهايات وتفسير النتائج بيانيا:

*) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=+\infty$ و 0.5 ن

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=-\infty$. 0.25 ن

*) التفسير البياني: المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x=0$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي:

$f'(x)=\frac{-2}{x^2}+1+\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}=\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}$ ، إذن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و هو المطلوب. 0.25 ن

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f: نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ وعليه جدول تغيراتها يكون: 0.25 ن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

0.25 ن

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f):

0.25 ن

أي نحسب: $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln(x^2)}{x}\right]=0$ ، إذن: المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C_f).

*) دراسة الوضع النسبي: أي ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-x\right]=\frac{2+\ln(x^2)}{x}$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-e^{-1}$		0		e^{-1}	$+\infty$
x	$-$		$-$	‖	$+$	0	$+$
$2+ln(x2)$	$+$	0	$-$	0	$-$		$+$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	يقطع	(C_f) فوق (Δ)

0.25 ن

3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f(x)+f(-x)=0$.

لدينا: $f(x)+f(-x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}-\frac{2}{x}-x-\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

0.25 ن

إذن و بما أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ فإن الدالة f فردية و منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر.

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

0.25 ن

$0{,}3<\alpha<0{,}4$. و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0{,}4$ و $-0{,}3$ أي يكون: $-0{,}4<\beta<-0{,}3$.

4) أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن: $f'(x)=1$ ، لنحل في $\mathbb{R}^*$ هذه الأخيرة.

لدينا: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}=1$ أي: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}-1=0$ أي تصبح: $\frac{-\ln(x^2)}{x}=0$ أي:

$$\begin{cases}-\ln(x^2)=0\\ x^2\neq 0\end{cases}$$

0.25 ن

هذا يكافئ: $x^2=1$ أي: $x=1$ أو $x=-1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيان للمستقيم (Δ).

0.25 ن

*) كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0=1$: $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $(T_1): y=x+2$.

*) كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0=-1$: $(T_2): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه:

0.25 ن

$(T_2): y = x - 2$.

ب) الإنشاء:

0.75 ن

5) لدينا: $h(x) = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1}\right] + 2$ أي يكون: $h(x) = f(x+1) + 2$.

إذن: يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-1}{2}$. **0.25 ن**

6) أ) بيان أن الدالة F أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$:

لدينا: $F'(x) = x + \frac{2}{4} \times \frac{2}{x} \times \ln x^2 + \frac{2}{|x|} = x + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{|x|}$.

*) إذا كان $x > 0$ فإن: $F'(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$ وإذا كان $x < 0$ فإن:
$F'(x) = \frac{-2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$. **0.25 ن**

ب) الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x = 1$ هي:
$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\left[\ln(x)^2\right]^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}$. **0.25 ن**

ج) حساب التكامل $I = \int_1^{\lambda} f(x)dx$ مع $\lambda > 1$: **0.25 ن**

لدينا: $I = \int_1^{\lambda} f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^{\lambda} = F(\lambda) - F(1)$ و منه: $I = F(\lambda)$ لأن: $F(1) = 0$. **0.25 ن**

*) التفسير الهندسي: I هي مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \lambda$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الـــدفـــاع الوطــــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمـــة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

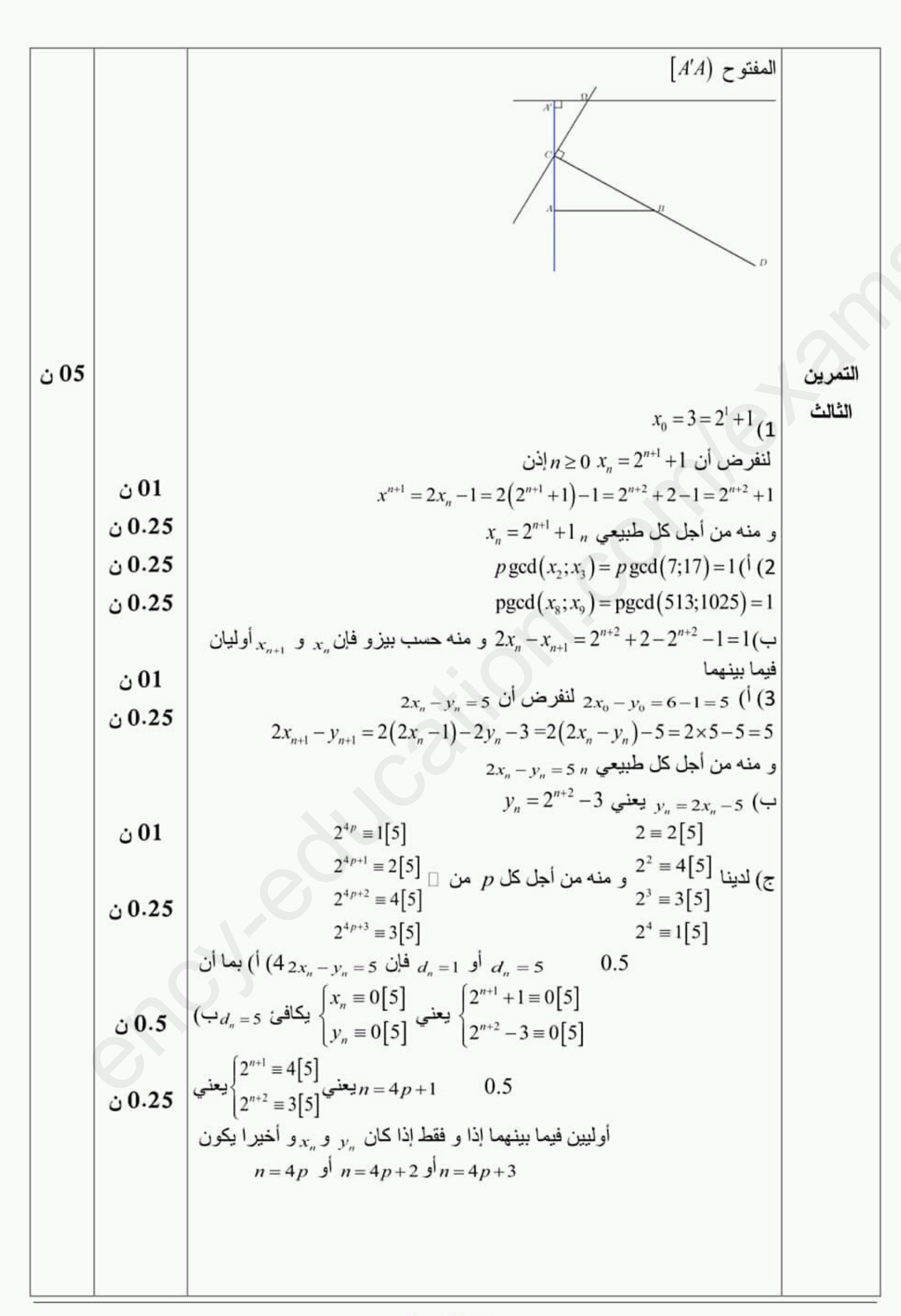
التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الثاني

محاور الموضوع	عناصـــــر الإجـــــابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	1) عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^{2}=90$.	0.5 ن	04 ن
	2)لتكن A حادثة سحب كريتان من نفس اللون: $P(A)=\frac{A_4^2+A_6^2}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$.	0.75 ن	
	3) لتكن B حادثة سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان : $P(B)=\frac{A_4^2}{90}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.	0.75 ن	
	4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة . أ) قيم X الممكنة : $X(\omega)=\{0;1;2\}$.	0.75 ن	
	قانون احتمال X : $P(X=0)=\frac{A_6^2}{A_{10}^2}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$. $P(X=1)=\frac{A_4^1\times A_6^1\times C_2^1}{A_{10}^2}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$. $P(X=2)=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.		
	(جدول قانون الاحتمال أدناه)	0.75 ن	

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

التمرين	الإجابة	العلامة	المجموع
التمرين الثاني	ب) الأمل الرياضياتي: $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{12}{15}=0,8$.	0.5 ن	04 ن
	1) لدينا $\begin{cases}S(A')=C\\ S(C)=B\end{cases}$ يعني $\begin{cases}CB=k\,A'C\\ (\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{CB})=\theta+2k\pi\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k=\frac{CB}{A'C}=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\\ \theta=(\overrightarrow{CA'};\overrightarrow{CB})+\pi=-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}\end{cases}$.	01.5 ن	
	2) بما أن C مصف $[AA']$ فإن B منتصف $[CD]$.	0.25 ن	
	أ) $C\Omega^2+CB^2=C\Omega^2+(\overrightarrow{C\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})^2$ $=2C\Omega^2+\Omega B^2-4\times\Omega C\times\Omega C\times\frac{1}{2}=\Omega B^2$ و منه $(C\Omega)$ يعامد (CB)	0.25 ن	
	ب) $A'\Omega^2+A'C^2=A'\Omega^2+(\overrightarrow{A'\Omega}+\overrightarrow{\Omega C})^2$ $=2A'\Omega^2+\Omega C^2-4\times\Omega A'\times\Omega A'\times\frac{1}{2}=\Omega C^2$ و منه $(A'\Omega)$ يعامد $(A'C)$	0.25 ن	
	ج) Ω هي تقاطع المستقيم الذي يعامد (BC) في C مع المستقيم الذي يعامد $(A'C)$ في A'.		
	II. 1) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{CA}{AB}$ إذن $CA=AB\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	0.25 ن	
	و منه $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $A'\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	0.5 ن	
	2) بما أن $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فإن عبارة S من الشكل $z'=(1+i\sqrt{3})z+b$ و بما أن $S(A')=C$ فإن $\frac{i\sqrt{3}}{3}=(1+i\sqrt{3})\frac{2i\sqrt{3}}{3}+b$ إذن $b=\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ و منه $z_\Omega=\frac{6-i\sqrt{3}}{-3i\sqrt{3}}=\frac{1}{3}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0.75 ن	
	3) $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ يعني $\arg(z-z_{A'})=-\frac{\pi}{2}$ يعني $(\vec{u},\overrightarrow{A'M})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و منه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم	0.25 ن	



المفتوح $[A'A]$

التمرين الثالث — 05 ن

1) $x_0 = 3 = 2^1 + 1$

لنفرض أن $x_n = 2^{n+1} + 1$ ، $n \geq 0$ إذن

$x^{n+1} = 2x_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 = 2^{n+2} + 1$ — 01 ن

و منه من أجل كل طبيعي n ، $x_n = 2^{n+1} + 1$ — 0.25 ن

2) أ) $p\gcd(x_2; x_3) = p\gcd(7;17) = 1$ — 0.25 ن

$\text{pgcd}(x_8; x_9) = \text{pgcd}(513;1025) = 1$ — 0.25 ن

ب) $2x_n - x_{n+1} = 2^{n+2} + 2 - 2^{n+2} - 1 = 1$ و منه حسب بيزو فإن x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما — 01 ن

3) أ) $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$ لنفرض أن $2x_n - y_n = 5$

$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - 2y_n - 3 = 2(2x_n - y_n) - 5 = 2\times 5 - 5 = 5$ — 0.25 ن

و منه من أجل كل طبيعي n ، $2x_n - y_n = 5$

ب) $y_n = 2x_n - 5$ يعني $y_n = 2^{n+2} - 3$ — 01 ن

ج) لدينا $2 \equiv 2[5]$ ، $2^2 \equiv 4[5]$ ، $2^3 \equiv 3[5]$ ، $2^4 \equiv 1[5]$ و منه من أجل كل p من ℕ : $2^{4p} \equiv 1[5]$ ، $2^{4p+1} \equiv 2[5]$ ، $2^{4p+2} \equiv 4[5]$ ، $2^{4p+3} \equiv 3[5]$ — 0.25 ن

4) أ) بما أن $2x_n - y_n = 5$ فإن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ — 0.5

ب) $d_n = 5$ يكافئ $\begin{cases} x_n \equiv 0[5] \\ y_n \equiv 0[5] \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 2^{n+1} + 1 \equiv 0[5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0[5] \end{cases}$ — 0.5 ن

يعني $\begin{cases} 2^{n+1} \equiv 4[5] \\ 2^{n+2} \equiv 3[5] \end{cases}$ يعني $n = 4p + 1$ — 0.5 — 0.25 ن

و أخيرا يكون x_n و y_n أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان $n = 4p$ أو $n = 4p + 2$ أو $n = 4p + 3$

التمرين الرابع			
	0.25 ن	**07 ن**	

التمرين الرابع — **07 ن**

0.25 ن

I . 1) من أجل كل x من □ $g'(x)=xe^{x}$

0.25 ن

g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
xe^{x}	$-$	0	$+$

0.25 ن

2) $g(0)$ قيمة حدية صغرى و بما أن $g(0)=0$ نستنتج أن g موجبة على □

II . 1) حساب $I(x)=\int_0^x (x-t)e^{t}\,dt$

01 ن

نضع $\begin{cases} u(t)=x-t \\ v'(t)=e^{t}\,dt \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t)=-dt \\ v(t)=e^{t} \end{cases}$ و حسب قانون التكامل بالتجزئة نجد

$$I(x)=\left[(x-t)e^{t}\right]_0^x+\int_0^x e^{t}\,dt=\left[(x-t)e^{t}+e^{t}\right]_0^x=e^{x}-x-1=e^{x}-(x+1)$$

2) ليكن x حقيقي موجب و t حقيقي من المجال $[0;x]$ معناه $0\le t\le x$ أي

$1\le e^{t}\le e^{x}$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^{t}(x-t)\le e^{x}(x-t)$ واخيرا

بعد المرور إلى التكامل نصل إلى $\int_0^x (x-t)\,dt\le\int_0^x e^{t}(x-t)\,dt\le\int_0^x e^{x}(x-t)\,dt$

0.5 ن

يعني $\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\le I(x)\le\left[e^{x}\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^x$ يعني $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^{x}}{2}$.

3) ليكن x حقيقي سالب و t حقيقي من المجال $[x;0]$ معناه $x\le t\le 0$ أي

$e^{x}\le e^{t}\le 1$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^{t}(x-t)\le e^{x}(x-t)$

لأن $(x-t)$ **سالب** واخيرا بعد المرور إلى التكامل نصل إلى

$\int_x^0 (x-t)\,dt\le\int_x^0 e^{t}(x-t)\,dt\le\int_x^0 e^{x}(x-t)\,dt$ لأن x **حقيقي سالب** يعني

0.5 ن

$$\left[\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0\le -I(x)\le\left[e^{x}\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0$$

يعني $-\frac{x^2}{2}\le -I(x)\le-\frac{x^2e^{x}}{2}$ و منه $\frac{x^2e^{x}}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$.

4) لدينا مما سبق من أجل كل x موجب $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^{x}}{2}$ أي

$\frac{x^2}{2}\le e^{x}-(1+x)\le\frac{x^2e^{x}}{2}$ و منه

من أجل كل x موجب تماما $\frac{1}{2}\le\frac{e^{x}-(1+x)}{x^2}\le\frac{e^{x}}{2}$ و بما أن $\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{e^{x}}{2}$ فإن

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{e^{x}-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}\ldots(1)$$

من أجل كل x سالب $\frac{x^2e^{x}}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$ أي $\frac{x^2e^{x}}{2}\le e^{x}-(1+x)\le\frac{x^2}{2}$ و منه

من أجل كل x سالب

الإجابة	العلامة
تماما $\frac{1}{2} \le \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن	
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} ...(2)$	
من (1) و (2) نستنتج أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	0.5 ن
III . 1) حساب النهايات	
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$	0.25 ن
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\left(1-e^{-x}\right) = +\infty$	0.25 ن
2) من السؤال II. 4نجد $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$	
و منه f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = \frac{1}{2}$.	0.75 ن
من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $f'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ و منه $f' > 0$ على $\mathbb{R}$. إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.	01 ن
$(T): y = \frac{1}{2}x + 1$	0.5 ن
(C_f) (T)	01 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2020 / 2021
دورة جوان 2021

امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: رياضيات

اختبار مادة الرياضيات — المدة : 04 ساعات و نصف

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر v_1 و q عددان طبيعيان ، (v_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها q و حدها الأول v_1.

I) عين v_1 و q علما أن v_1 و q أوليان فيما بينهما و $2v_1^2 = v_4 - v_2$.

II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q = 2$.

1) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم عين كل الحدود المحصورة بين العددين: 2020 و 1441.

2) نضع: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$.

– أحسب كلا من S_n و P_n بدلالة n ، ثم أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

3) نعتبر α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

أ) حلل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين كل الثنائيات الطبيعية (α, β) بحيث يكون: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha, \beta) = 2 \end{cases}$.

ج) نسجل قيم الحدود السته الأولى للمتتالية (v_n) على 6 بطاقات متماثلة ونخلطها جيدا ثم نسحب منها بصفة عشوائية بطاقتان في آن واحد.

– ما هو احتمال سحب بطاقتين تحملان حدين رقميهما أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب) استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7.

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $4\left(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1\right) \equiv 3[7]$.

3) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7.

4) فيما يلي نفرض: $n = 9$.

نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة (E) حيث: $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \,\dots\dots (E)$.

أ) عين $PGCD\left(C_{10}^2 ; A_{12}^2\right)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x, y).

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 0[5]$ ، ثم حل المعادلة (E).

5) أ) إذا كان x و y عددين طبيعيين ، ما هي القيم الممكنة لـ d حيث: $d = PGCD(x, y)$.

ب) عين الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث يكونا العددين x و y أوليان فيما بينهما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين M و M' التين لاحقتاهما z و z' على الترتيب . نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية .

نذكر أن $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z و $|z|$ هي طويلة العدد المركب z .

1) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Re}(z'\overline{z})=0$.

2) بين أن النقط O ، M و M' في استقامية إذا وفقط إذا كان $IM(z'\overline{z})=0$.

3) لتكن N النقطة ذات اللاحقة z^2-1 . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين .

4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$.

أ) بين أن $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z}^{-2}\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها النقط O ، N و P في استقامية .

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=x^2-\ln(x^2)$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ، ثم فسر النتائج بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ تكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) ذو المعادلة $y=x$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـــ(Δ).

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}3<\alpha<0{,}4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له.

4) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

ب) أنشئ كلا من: (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحني (C_f).

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}+(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]+2$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

– بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى المنحني (C_h). (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $F(x)=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}(\ln x^2)^2+2\ln|x|\right]$ هي دالة أصلية لـــ f على $\mathbb{R}^*$.

ب) عين دالة أصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$. أحسب التكامل: $I=\int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون إرجاع .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب.

2) أحسب احتمال سحب كريتان من نفس اللون .

3) أحسب احتمال سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان .

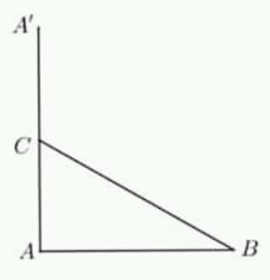
4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I . ABC مثلث مباشر قائم في A حيث $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ (أنظر الشكل)



A' نظيرة A بالنسبة للنقطة C . ليكن S التشابه المباشر الذي يحول A' إلى C و C إلى B .

1)عين نسبة وزاوية التشابه S .

2)أنشئ D صورة A بواسطة S.

3)ليكن Ω مركز التشابه المباشر S .

أ) أثبت أن المستقيمين (ΩC) و (BC) متعامدان.

ب) أثبت أن المستقيمين $(\Omega A')$ و (CA') متعامدان.

ج) استنتج طريقة لإنشاء النقطة Ω.

II . فيما يلي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث لاحقة B هي 1.

1) عين لاحقة كل من C و A' .

2) بين أن العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ ، ثم استنتج لاحقة Ω.

3) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

متتاليتا الأعداد الطبيعية (x_n) و (y_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي $\begin{cases} x_0=3 \\ x_{n+1}=2x_n-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_0=1 \\ y_{n+1}=2y_n+3 \end{cases}$

1) أثبت بالتراجع من أجل كل طبيعي n أن $x_n=2^{n+1}+1$.

2) أ) احسب $\text{pgcd}(x_2;x_3)$ و $\text{pgcd}(x_8;x_9)$

ب) هل x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما من أجل كل طبيعي n.

3) أ) أثبت من أجل كل طبيعي n أن $2x_n-y_n=5$.

ب) أكتب y_n بدلالة n.

جـ) أدرس حسب قيم الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.

4) نضع $d_n=\text{pgcd}(x_n;y_n)$.

أ) ما هي القيم الممكنة لـــــــــ d_n.

ب) عين مجموعة قيم n التي يكون من أجلها x_n و y_n أوليين فيما بينهما.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـــــــــ : $g(x)=e^x(x-1)+1$

1)أدرس تغيرات g ثم أنجز جدول تغيراتها.

2)استنتج أن $g(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II. لتكن الدالة العددية I المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $I(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$

1)أثبت بواسطة مكاملة بالتجزئة أن: $I(x)=e^x-(1+x)$

2) ليكن x عدد حقيقي موجب . أثبت من أجل كل t من $[0;x]$ أن: $1\leq e^t\leq e^x$.

ثم استنتج أن: $\frac{x^2}{2}\leq I(x)\leq \frac{x^2e^x}{2}$.

3) ليكن x عدد حقيقي سالب. أثبت من أجل كل t من $[x;0]$ أن: $e^x\leq e^t\leq 1$، ثم استنتج أن: $\frac{x^2e^x}{2}\leq I(x)\leq \frac{x^2}{2}$.

4) استنتج أن: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

III. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـــــ : $\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0.

3) أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f.

4) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) أرسم (T) و (C_f).

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفاع الوطني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة كاملة
التمرين الأول	I) تعيين العددين v_1 و q: لدينا: $2v_1^2 = v_4 - v_2$ و نعلم أن: $v_2 = v_1.q$ و $v_4 = v_1.q^3$ أي تصبح: $2v_1^2 = v_1.q^3 - v_1.q$ أي: $2v_1^2 = v_1.q(q^2-1)$ ومنه: $\boxed{2v_1 = q(q^2-1)}$. لدينا: q يقسم $2v_1$ و q أولي مع v_1 إذن: q يقسم 2 (حسب مبرهنة غوص) أي أن: $q \in \{1,2\}$. - في حالة $q=1$ يكون: $2v_1 = 0$ أي: $v_1 = 0$ (مرفوض). - في حالة $q=2$ يكون: $2v_1 = 6$ أي: $v_1 = 3$. إذن نتحصل على: $\boxed{q=2}$ و $\boxed{v_1=3}$.	0.75 ن	04.5 ن
	II) نفرض أن: $v_1 = 3$ و $q=2$. 1) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n): نعلم أن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $\boxed{v_n = 3\times 2^{n-1}}$.	0.25 ن	
	*) تعيين كل الحدود المحصورة بين 2020 و 1441: لدينا: $1441 \le 3\times 2^{n-1} \le 2020$ أي: $481 \le 2^{n-1} \le 673$ أي نجد: $\ln 481 \le \ln 2^{n-1} \le \ln 673$ أي: $\ln 481 \le (n-1)\ln 2 \le \ln 673$ و منه: $\frac{\ln 481}{\ln 2} \le n-1 \le \frac{\ln 673}{\ln 2}$ أي: $8,9 \le n-1 \le 9,39$ ومنه: $9,9 \le n \le 10,39$ ، إذن: $\boxed{n=10}$ وبالتالي يوجد حد وحيد محصور بين العددين 2020 و 1441 هو: $\boxed{v_{10} = 1536}$	0.75 ن	
	2) لدينا: $S_n = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2$ و $P_n = \ln(S_n)$. المجموع S_n هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول v_1^2 وعدد حدودها n حدا. أي يكون: $S_n = v_1^2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = 9\times\frac{1-(4)^n}{1-4}$ ومنه: $\boxed{S_n = 3(4^n - 1)}$.	01 ن	
	*) لنحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[3(4^n-1)\right] = +\infty$ لأن: $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.		

*) لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(S_n) = +\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. — 0.25 ن ، 0.25 ن

3) لدينا: α و β عددان طبيعيان حيث: $v_\alpha < v_\beta$.

أ) تحليل العدد 2304 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على: $\boxed{2304 = 2^8 \times 3^2}$. — 0.25 ن

ب) تعيين كل الثنائيات (α,β):

لدينا: $\begin{cases} v_\alpha \times v_\beta = 2304 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ أي يكون: $\begin{cases} (3\times 2^{\alpha-1})(3\times 2^{\beta-1}) = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$ ومنه:

$\begin{cases} 2^{\alpha+\beta-2} \times 3^2 = 2^8 \times 3^2 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} \alpha+\beta = 10 \\ PGCD(\alpha,\beta) = 2 \end{cases}$. لدينا: $\alpha = 2\alpha'$ و $\beta = 2\beta'$ و منه: $2\alpha' + 2\beta' = 10$ أي نجد: $\boxed{\alpha' + \beta' = 5}$.

لكن لدينا: $\alpha < \beta$ لأن: $v_\alpha < v_\beta$ (المتتالية (v_n) متزايدة) ومنه يكون: $\alpha' < \beta'$.

أي نجد أن هناك ثنائيتان تحقق: $(\alpha',\beta') = (1,4)$ و $(\alpha',\beta') = (2,3)$.

إذن الثنائيات (α,β) المطلوبة هي: $\boxed{(\alpha,\beta) = (2,8)}$ و $\boxed{(\alpha,\beta) = (4,6)}$. — 0.5 ن

4) الأعداد المسجلة على البطاقات الست هي: 3 ، 6 ، 12 ، 24 ، 48 ، 96 .

نلاحظ أنه توجد بطاقة وحيدة تحمل حدا رقميه أوليان فيما بينهما و هو v_3 .

لكن السحب هنا يتم دفعة واحدة وفي هذا الأخير لا يوجد تكرار أي ليس باستطاعتنا سحب البطاقة التي تحمل الحد v_3 مرتين في آن واحد إذن هذا حدث مستحيل واحتماله يساوي 0 . — 0.5 ن

التمرين الثاني — 04 ن

1) أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .

نجد: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي: — 0.5 ن

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

ب) نعلم أن: $1440 \equiv 5[7]$ أي أن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{(2019)^{2020}}[7]$. — 0.25 ن

*) لنعين باقي قسمة العدد 2019^{2020} على 6: $2019 \equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020} \equiv 3^{2020}[6]$

لكن نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $\boxed{3^n \equiv 3[6]}$ و منه: $2019^{2020} \equiv 3[6]$ أي: $2019^{2020} = 6k+3$.

إذن: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 5^{6k+3}[7]$ أي: $1440^{(2019)^{2020}} \equiv 6[7]$.

و منه باقي قسمة العدد $1440^{(2019)^{2020}}$ على 7 هو 6 . — 0.25 ن

2) لدينا: $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)\equiv 3[7]$ ، نلاحظ أن: $\left(5^{n-2}+5^{n-3}+.....+1\right)$

هو مجموع حدود لمتتالية هندسية أساسها 5 عدد حدودها $(n-1)$ حدا و منه:

$4\left(1\times\frac{5^{n-1}-1}{5-1}\right)\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}-1\equiv 3[7]$ أي: $5^{n-1}\equiv 4[7]$

ومنه يكون: $n-1=6k+2$ إذن: $\boxed{n=6k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. — 0.5 ن

3) أ) لنبين أن: $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2n^2+6n+6$.

*) لنحسب $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2$:

$$2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2\times\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\times 2!}+\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}$$

$$=\frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}$$

و منه: $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=(n+1)n+(n+3)(n+2)=n^2+n+n^2+2n+3n+6$

إذن: $\boxed{2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2n^2+6n+6}$ هو المطلوب. — 0.5 ن

ب) لنعين قيم n بحيث يكون: $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2\equiv 0[7]$.

لدينا: $2n^2+6n+6\equiv 0[7]$ أي: $2\left(n^2+3n+3\right)\equiv 0[7]$ بما أن 2 أولي مع 7 يكون:

$n^2+3n+3\equiv 0[7]$ أي: $n^2+3n\equiv -3[7]$ و منه: $n^2+3n\equiv 4[7]$.

يمكن الاستعانة بالجدول التالي (الموافقة بترديد 7):

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	4	1	[7]
$3n\equiv$	0	3	6	2	5	1	4	[7]
$n^2+3n\equiv$	0	4	3	4	0	5	5	[7]

وبالتالي يكون: $n\equiv 1[7]$ أو $n\equiv 3[7]$ أي: $\boxed{n=7k+1}$ أو $\boxed{n=7k+3}$ مع $(k\in\mathbb{N})$. — 0.75 ن

4) لدينا: $C_{10}^2x-A_{12}^2y=15\,.....(E)$.

أ) لنعين $PGCD\left(C_{10}^2;A_{12}^2\right)$:

نعلم أن: $C_{10}^2=\frac{10!}{8!\times 2!}=45$ و $A_{12}^2=\frac{12!}{10!}=132$ ومنه $PGCD\left(C_{10}^2;A_{12}^2\right)=3$.

إذن المعادلة (E) تصبح: $45x-132y=15$

هذه الأخيرة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ لأن: $PGCD(45,132)=3$ و 3 يقسم 15. — 0.25 ن

ب) لدينا: $45x-132y=15$ أي تصبح: $15x-44y=5$ أي: $44y=15x-5$ أي:

$44y=5(3x-1)$

لدينا: 5 يقسم $44y$ و 5 أولي مع 44 حسب مبرهنة غـوص فإن: 5 يقسم y

وبالتالي يكون: $y=5k$ أي: $\boxed{y\equiv 0[5]}$ هو المطلوب. — 0.25 ن

*) لنحل المعادلة (E):

نبحث أولا عن الحل الخاص أي: $y=5$ و منه: $44\times 5=5(3x-1)$ أي: $44=3x-1$ إذن:

العلامة		عناصر الإجابة	المحاور
		$x=15$. ومنه: $(x_0,y_0)=(5,15)$.	
		لدينا: $\begin{cases}15x-44y=5\\15(15)-44(5)=5\end{cases}$ بالطرح نجد: $15(x-15)=44(y-5)$ بما أن 15 أولي مع 44	
		وحسب مبرهنة غوص نستنتج أن: $\begin{cases}x-15=44k\\y-5=15k\end{cases}$ إذن: $\boxed{x=44k+15}$ و $\boxed{y=15k+5}$.	
		ومنه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.	
	0.25 ن	5) أ) لدينا الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E) أي يكون: $15x-44y=5$ و بما أن:	
	0.25 ن	$PGCD(x,y)=d$ فإن: d يقسم $(15x-44y)$ و d يقسم 5 ، إذن قيم d هي: 1 ، 5.	
		ب) لندرس حالة $d=5$ أي: $x\equiv 0[5]$ أي: $44k+15\equiv 0[5]$ أي: $4k\equiv 0[5]$ و منه: $k\equiv 0[5]$	
		أي يكون: $\boxed{k=5\alpha}$ مع $(\alpha\in\mathbb{Z})$.	
	0.25 ن	إذن: $d=5$ لما $k=5\alpha$ و بالتالي يكون: $d=1$ لما $k\neq 5\alpha$	التمرين الثالث
04 ن		و منه: $\boxed{(x,y)=(44k+15,15k+5)}$ مع $(k\neq 5\alpha)$.	
	0.75 ن	1) لدينا : $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM}'(x';y')$ متعامدين معناه $xx'+yy'=0$. $z'\overline{z}=(x'+iy').(x-iy)=(xx'+yy')+i(xy'-yx')$. ومنه : $xx'+yy'=0$ تكافئ $\text{Re}(z'\overline{z})=0$.	
	0.75 ن	2) النقط O ، M و M' في استقامية معناه $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM}'(x';y')$ مرتبطان خطيا أي $xy'+yx'=0$ وهذا يكافئ $IM(z'\overline{z})=0$.	
	01ن	3) لدينا : $(z^2-1)\overline{z}=\lvert z\rvert z-\overline{z}=(x^2+y^2)(x+iy)-(x-iy)$ $=x(x^2+y^2-1)+iy(x^2+y^2+1)$ $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين يكافئ $\text{Re}((z^2-1)\overline{z})=0$ أي $x(x^2+y^2-1)$ ومنه $x=0$ أو $x^2+y^2=1$. مجموعة النقط M هي اتحاد محور التراتيب مع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1	
	0.75 ن	4) لتكن P النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ حيث $z\neq 0$. أ) $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(-\overline{z}^2\right)\left(\overline{\frac{1}{z^2}-1}\right)=-\overline{z}^2\left\lvert\frac{1}{z^2}-1\right\rvert^2$.	
	0.75 ن	ب) O ، N و P في استقامية تكافئ $IM\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)\right)=0$ أي $IM\left(-\overline{z}^2\left\lvert\frac{1}{z^2}-1\right\rvert^2\right)=0$.أي $IM\left(-\overline{z}^2\right)=0$ ومنه $2xy=0$ أي $x=0$ أو $y=0$.	التمرين الرابع
07.5 ن		ومجموعة النقط M هي اتحاد محور الفواصل مع محور التراتيب باستثناء المبدأ O .	

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $g(x)=x^2-\ln(x^2)$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

*) الدالة المشتقة: الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و عبارة دالتها المشتقة هي: $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$.

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x.(2x^2-2)$ و عليه نلخص الإشارة في الجدول التالي: إذن جدول التغيرات يكون:

0.5 ن

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$2x^2-2$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

0.25 ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

0.75 ن

*) النهايات: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} 0} g(x)=+\infty$.

0.25 ن

2) نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم تكون: $g(x)>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}$.

1) أ) حساب النهايات:

*) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{2}{x^2}+1+\frac{\ln(x^2)}{x^2}\right)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2}=0$

فبوضع: $x^2=t$

هذه الأخيرة تصبح: $\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0}$.

0.5 ن

*) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

ب) حساب النهايات وتفسير النتائج بيانيا:

*) $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=+\infty$ و

0.5 ن

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}\right)=-\infty$.

0.25 ن

*) التفسير البياني: المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x=0$.

2) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي:

0.25 ن

$f'(x)=\frac{-2}{x^2}+1+\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}=\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}$ ، إذن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و هو المطلوب.

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f: نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن الدالة f

0.25 ن

متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ وعليه جدول تغيراتها يكون:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25 ن

ج) برهان أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحني (C_f):

0.25 ن

أي نحسب: $\lim_{|x|\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{|x|\to\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{\ln(x^2)}{x}\right]=0$ ، إذن: المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني (C_f).

*) دراسة الوضع النسبي: أي ندرس إشارة الفرق $[f(x)-x]=\frac{2+\ln(x^2)}{x}$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

0.25 ن

x	$-\infty$	$-e^{-1}$		0		e^{-1}	$+\infty$
x	$-$		$-$	‖	$+$	0	$+$
$2+ln(x2)$	$+$	0	$-$	0	$-$		$+$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع	(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع	(C_f) فوق (Δ)

3) أ) التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ يكون: $f(x)+f(-x)=0$.

لدينا: $f(x)+f(-x)=\frac{2}{x}+x+\frac{\ln(x^2)}{x}-\frac{2}{x}-x-\frac{\ln(x^2)}{x}=0$.

0.25 ن

إذن و بما أنه من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ فإن الدالة f فردية و منحناها البياني (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز التناظر.

ب) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

0.25 ن

$0{,}3<\alpha<0{,}4$. و بما أن الدالة f فردية إذن يوجد حل آخر β محصور بين $-0{,}4$ و $-0{,}3$ أي يكون: $-0{,}4<\beta<-0{,}3$.

4) أ) المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) يعني أن: $f'(x)=1$ ، لنحل في $\mathbb{R}^*$ هذه الأخيرة.

لدينا: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}=1$ أي: $\frac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}-1=0$ أي تصبح: $\frac{-\ln(x^2)}{x}=0$ أي:

$$\begin{cases}-\ln(x^2)=0\\ x^2\neq 0\end{cases}$$

0.25 ن

هذا يكافئ: $x^2=1$ أي: $x=1$ أو $x=-1$ و منه فعلا المنحني (C_f) يقبل مماسين موازيان للمستقيم (Δ).

0.25 ن

*) كتابة معادلة المماس (T_1) عند $x_0=1$: $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه: $(T_1): y=x+2$.

*) كتابة معادلة المماس (T_2) عند $x_0=-1$: $(T_2): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه:

0.25 ن

	$(T_2): y = x - 2$. ب) الإنشاء:	
0.75 ن		
0.25 ن	5) لدينا: $h(x) = \left[\frac{\ln(x+1)^2}{x+1} + (x+1) + \frac{2}{x+1}\right] + 2$ أي يكون: $h(x) = f(x+1) + 2$. إذن: يوجد تحويل نقطي يحول المنحني (C_f) إلى (C_h) و هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-1}{2}$.	
0.25 ن	6) أ) بيان أن الدالة F أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$: لدينا: $F'(x) = x + \frac{2}{4} \times \frac{2}{x} \times \ln x^2 + \frac{2}{\lvert x \rvert} = x + \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{\lvert x \rvert}$. *) إذا كان $x > 0$ فإن: $F'(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$ وإذا كان $x < 0$ فإن: $F'(x) = \frac{-2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$.	
0.25 ن	ب) الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x = 1$ هي: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\left[\ln(x)^2\right]^2 + 2\ln\lvert x \rvert - \frac{1}{2}$.	
0.25 ن	ج) حساب التكامل $I = \int_1^{\lambda} f(x)dx$ مع $\lambda > 1$:	
0.25 ن	لدينا: $I = \int_1^{\lambda} f(x)dx = [F(x)]_1^{\lambda} = F(\lambda) - F(1)$ و منه: $I = F(\lambda)$ لأن: $F(1) = 0$. *) التفسير الهندسي: I هي مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = \lambda$.	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الــدفــاع الوطـــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
مديرية مدارس أشبال الأمـــة

السنة الدراسية : 2020 / 2021

المستوى الثالثة رياضيات

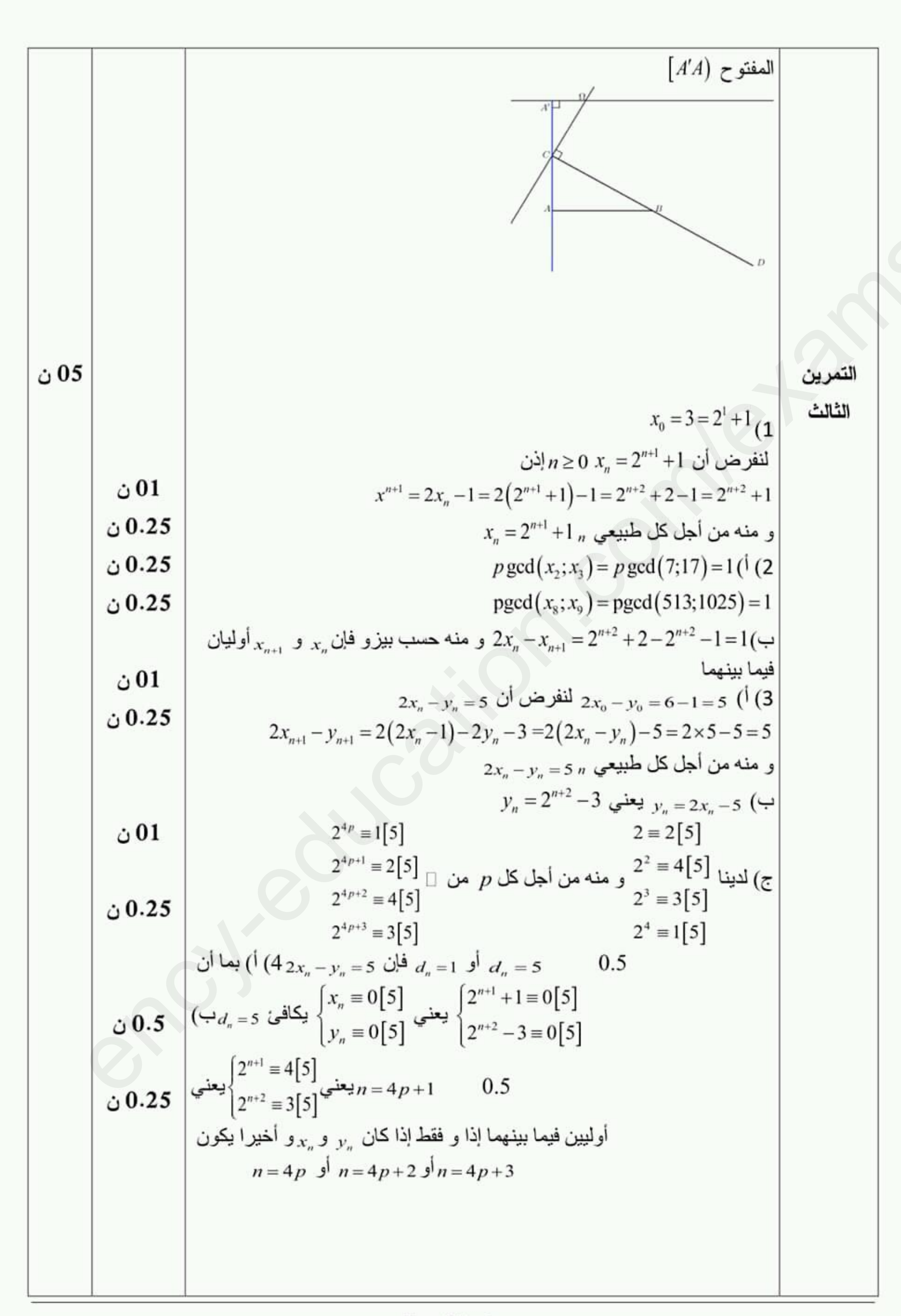
التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي مادة الرياضيات

الموضوع الثاني

محاور الموضوع	عناصـــــر الإجـــــابة	العلامــــة: مجزأة	العلامــــة: كاملة
التمرين الأول	1) عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_{10}^2 = 90$.	0.5 ن	04 ن
	2)لتكن A حادثة سحب كريتان من نفس اللون: $P(A) = \frac{A_4^2 + A_6^2}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.	0.75 ن	
	3) لتكن B حادثة سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان : $P(B) = \frac{A_4^2}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.	0.75 ن	
	4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة . أ) قيم X الممكنة : $X(\omega) = \{0;1;2\}$.	0.75 ن	
	قانون احتمال X : $P(X=0) = \frac{A_6^2}{A_{10}^2} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. $P(X=1) = \frac{A_4^1 \times A_6^1 \times C_2^1}{A_{10}^2} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$. $P(X=2) = \frac{A_4^2}{A_{10}^2} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.	0.75 ن	

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

التمرين	عناصر الإجابة	العلامة	المجموع
التمرين الثاني	ب) الأمل الرياضياتي: $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{12}{15}=0,8$.	0.5 ن	04 ن
	1) لدينا $\begin{cases}S(A')=C\\ S(C)=B\end{cases}$ يعني $\begin{cases}CB=k\,A'C\\ (\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{CB})=\theta+2k\pi\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k=\frac{CB}{A'C}=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\\ \theta=(\overrightarrow{CA'};\overrightarrow{CB})+\pi=-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}\end{cases}$.	01.5 ن	
	2) بما أن C مصف $[AA']$ فإن B منتصف $[CD]$.	0.25 ن	
	أ) $C\Omega^2+CB^2=C\Omega^2+(\overrightarrow{C\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})^2$ $=2C\Omega^2+\Omega B^2-4\times\Omega C\times\Omega C\times\frac{1}{2}=\Omega B^2$ و منه $(C\Omega)$يعامد(CB)	0.25 ن	
	ب) $A'\Omega^2+A'C^2=A'\Omega^2+(\overrightarrow{A'\Omega}+\overrightarrow{\Omega C})^2$ $=2A'\Omega^2+\Omega C^2-4\times\Omega A'\times\Omega A'\times\frac{1}{2}=\Omega C^2$ و منه $(A'\Omega)$يعامد$(A'C)$	0.25 ن	
	ج) Ω هي تقاطع المستقيم الذي يعامد (BC) في C مع المستقيم الذي يعامد $(A'C)$ في A'.		
	II. 1) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{CA}{AB}$ إذن $CA=AB\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	0.25 ن	
	و منه $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $A'\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	0.5 ن	
	2) بما أن $k=2$ و $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فإن عبارة S من الشكل $z'=(1+i\sqrt{3})z+b$ و بما أن $S(A')=C$ فإن $\frac{i\sqrt{3}}{3}=(1+i\sqrt{3})\frac{2i\sqrt{3}}{3}+b$ إذن $b=\frac{6-i\sqrt{3}}{3}$ و منه $z_{\Omega}=\frac{6-i\sqrt{3}}{-3i\sqrt{3}}=\frac{1}{3}+i\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0.75 ن	
	3) $\arg\left(z-2i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ يعني $\arg(z-z_{A'})=-\frac{\pi}{2}$ يعني $(\vec{u},\overrightarrow{A'M})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و منه مجموعة النقط M هي نصف المستقيم	0.25 ن	



المفتوح $[A'A)$

التمرين الثالث — 05 ن

1) $x_0=3=2^1+1$

لنفرض أن $x_n=2^{n+1}+1$ ، $n\geq 0$ إذن

$x^{n+1}=2x_n-1=2\left(2^{n+1}+1\right)-1=2^{n+2}+2-1=2^{n+2}+1$ — 01 ن

و منه من أجل كل طبيعي n ، $x_n=2^{n+1}+1$ — 0.25 ن

2) أ) $p\gcd\left(x_2;x_3\right)=p\gcd\left(7;17\right)=1$ — 0.25 ن

$\text{pgcd}\left(x_8;x_9\right)=\text{pgcd}\left(513;1025\right)=1$ — 0.25 ن

ب) $2x_n-x_{n+1}=2^{n+2}+2-2^{n+2}-1=1$ و منه حسب بيزو فإن x_n و x_{n+1} أوليان فيما بينهما — 01 ن

3) أ) $2x_0-y_0=6-1=5$ لنفرض أن $2x_n-y_n=5$

$2x_{n+1}-y_{n+1}=2\left(2x_n-1\right)-2y_n-3=2\left(2x_n-y_n\right)-5=2\times5-5=5$ — 0.25 ن

و منه من أجل كل طبيعي n ، $2x_n-y_n=5$

ب) $y_n=2x_n-5$ يعني $y_n=2^{n+2}-3$ — 01 ن

ج) لدينا

$2\equiv2[5]$ ، $2^2\equiv4[5]$ ، $2^3\equiv3[5]$ ، $2^4\equiv1[5]$

و منه من أجل كل p من ℕ

$2^{4p}\equiv1[5]$ ، $2^{4p+1}\equiv2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv4[5]$ ، $2^{4p+3}\equiv3[5]$ — 0.25 ن

4) أ) بما أن $2x_n-y_n=5$ فإن $d_n=1$ أو $d_n=5$ — 0.5

ب) $d_n=5$ يكافئ $\begin{cases}x_n\equiv0[5]\\y_n\equiv0[5]\end{cases}$ يعني $\begin{cases}2^{n+1}+1\equiv0[5]\\2^{n+2}-3\equiv0[5]\end{cases}$ — 0.5 ن

يعني $\begin{cases}2^{n+1}\equiv4[5]\\2^{n+2}\equiv3[5]\end{cases}$ يعني $n=4p+1$ — 0.5 — 0.25 ن

و أخيرا يكون x_n و y_n أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان

$n=4p+3$ أو $n=4p+2$ أو $n=4p$

التمرين الرابع (07 ن)

I . 1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $g'(x)=xe^x$ (0.25 ن)

g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. (0.25 ن)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$	

(0.25 ن)

2) $g(0)$ قيمة حدية صغرى و بما أن $g(0)=0$ نستنتج أن g موجبة على $\mathbb{R}$

II . 1) حساب $I(x)=\int_0^x (x-t)e^t\,dt$ (01 ن)

نضع $\begin{cases} u(t)=x-t \\ v'(t)=e^t\,dt \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(t)=-dt \\ v(t)=e^t \end{cases}$ و حسب قانون التكامل بالتجزئة نجد

$$I(x)=\left[(x-t)e^t\right]_0^x+\int_0^x e^t\,dt=\left[(x-t)e^t+e^t\right]_0^x=e^x-x-1=e^x-(x+1)$$

2) ليكن x حقيقي موجب و t حقيقي من المجال $[0;x]$ معناه $0\le t\le x$ أي
$1\le e^t\le e^x$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^t(x-t)\le e^x(x-t)$ واخيرا
بعد المرور إلى التكامل نصل إلى $\int_0^x (x-t)\,dt\le\int_0^x e^t(x-t)\,dt\le\int_0^x e^x(x-t)\,dt$
يعني $\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\le I(x)\le\left[e^x\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^x$ يعني $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^x}{2}$. (0.5 ن)

3) ليكن x حقيقي سالب و t حقيقي من المجال $[x;0]$ معناه $x\le t\le 0$ أي
$e^x\le e^t\le 1$ وبعد الضرب في $(x-t)$ نجد $(x-t)\le e^t(x-t)\le e^x(x-t)$
لأن $(x-t)$ **سالب** واخيرا بعد المرور إلى التكامل نصل إلى
$\int_x^0 (x-t)\,dt\le\int_x^0 e^t(x-t)\,dt\le\int_x^0 e^x(x-t)\,dt$ لأن x **حقيقي سالب** يعني

$$\left[\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0\le -I(x)\le\left[e^x\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)\right]_x^0$$

يعني $-\frac{x^2}{2}\le -I(x)\le-\frac{x^2e^x}{2}$ و منه $\frac{x^2e^x}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$. (0.5 ن)

4) لدينا مما سبق من أجل كل x موجب $\frac{x^2}{2}\le I(x)\le\frac{x^2e^x}{2}$ أي

$\frac{x^2}{2}\le e^x-(1+x)\le\frac{x^2e^x}{2}$ و منه

من أجل كل x موجب تماما $\frac{1}{2}\le\frac{e^x-(1+x)}{x^2}\le\frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$ فإن

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}\ldots(1)$$

من أجل كل x سالب $\frac{x^2e^x}{2}\le I(x)\le\frac{x^2}{2}$ أي $\frac{x^2e^x}{2}\le e^x-(1+x)\le\frac{x^2}{2}$ و منه
من أجل كل x سالب

	العلامة
تماما $\frac{1}{2} \le \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \le \frac{e^x}{2}$ و بما أن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ فإن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} ...(2)$ من (1) و (2) نستنتج أن $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	0.5 ن
III . 1) حساب النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$	0.25 ن
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\left(1-e^{-x}\right) = +\infty$	0.25 ن
2) من السؤال II. 4نجد $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$ و منه f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = \frac{1}{2}$.	0.75 ن
من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $f'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ و منه $f'>0$ على $\mathbb{R}^*$. إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.	01 ن
$(T): y = \frac{1}{2}x+1$	0.5 ن
(الرسم) (C_f) ، (T)	01 ن

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2021

شعبة: العلوم التجريبية — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n + 1}$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;3]$ بـ: $f(x) = 4 - \dfrac{4}{x+1}$ و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \leq u_n \leq 3$.
   ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.
3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(3 - u_n)$.
   ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq 3 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (3 - u_0)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على خمس كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء و كريتين خضراوين. نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع و نعتبر الحادثتين A و B حيث A: سحب كريتين من نفس اللون و B: سحب كرية بيضاء على الأقل.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.
2. أحسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.
   ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث: 05 نقاط

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A، B، C و D التي لاحقاتها $z_A=\sqrt{3}+i$، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$، $z_C=\overline{z_B}$ و $z_D=\sqrt{3}$.

1. بين أن النقطة A صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$ ثم استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي.ثم بين أن $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2021}\times\left(z_B\right)^{1441}\times\left(z_C\right)^{1962}=1$.
3. ليكن f التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M\left(z\right)$ إلى النقطة $M'\left(z'\right)$ حيث: $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-i$.

أ) عين طبيعة التحويل النقطي f محددا عناصره المميزة.

ب) بين أن النقطة B صورة النقطة D بالتحويل النقطي f ثم استنتج طبيعة كلا من المثلث BCD و الرباعي $ABCD$.

4. عين طبيعة المجموعة $\left(E\right)$ مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $Arg\left(z-z_B\right)=Arg\left(\overline{z}-z_C\right)+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g\left(x\right)=x-3+4\ln\left(x+1\right)$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ثم تحقق أن $0,74<\alpha<0,76$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g\left(x\right)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\frac{4\ln\left(x+1\right)}{x+1}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) بين أن $\lim_{x\to -1^{>}}f\left(x\right)=+\infty$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f'\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)}{\left(x+1\right)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. أ) بين أن $f\left(\alpha\right)=-\frac{\left(\alpha-3\right)^2}{4\left(\alpha+1\right)}$.

ب) عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f\left(x\right)-f\left(\alpha\right)}{x-\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)$ و $\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-h\left(x\right)\right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ و $\left(C_h\right)$.

4. أ) عين احداثيات نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع حاملي محوري الاحداثيات.

ب) أرسم $\left(C_f\right)$ ثم أرسم $\left(C'\right)$ التمثيل البياني للدالة $\left|f\right|$، نأخذ $f\left(\alpha\right)=-0,72$.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2،2 و ثلاث كريات سوداء مرقمة بـ: 1، 2، 3 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

1. أحسب احتمال كلا من الحوادث التالية:
   - ✓ A : سحب ثلاث كريات من نفس اللون.
   - ✓ B : سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها عدد فردي.
   - ✓ C : سحب ثلاث كريات جداء أرقامها عدد زوجي.
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
   - ➢ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}eu_n + \frac{2}{3}e^{n+1} \end{cases}$ و $v_n = u_n - e^n$.

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}e$ يطلب حساب حدها الأول.

   ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

   ج) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

2. نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $w_n = \ln(u_n - v_n)$.

   أ) تحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n$.

   ب) بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

   ج) ليكن المجموع S_n حيث $S_n = w_0^2 + w_1^2 + ... + w_n^2$.

   - ✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A = 2i$، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

1. أ) أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل المثلثي ثم استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

   ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_B^n حقيقي سالب تماما.

2. أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.

ب) استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. f التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=2iz+4+2i$.

✓ بين أن f تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

4. عين طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left|\overline{z}-\sqrt{3}+i\right|=\left|iz+2\right|$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=e^{2x}-4x-1$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.

2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الأخر α حيث $0,62<\alpha<0,64$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\left(2x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}+x-1$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-2x}g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. بين أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{4};2e^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

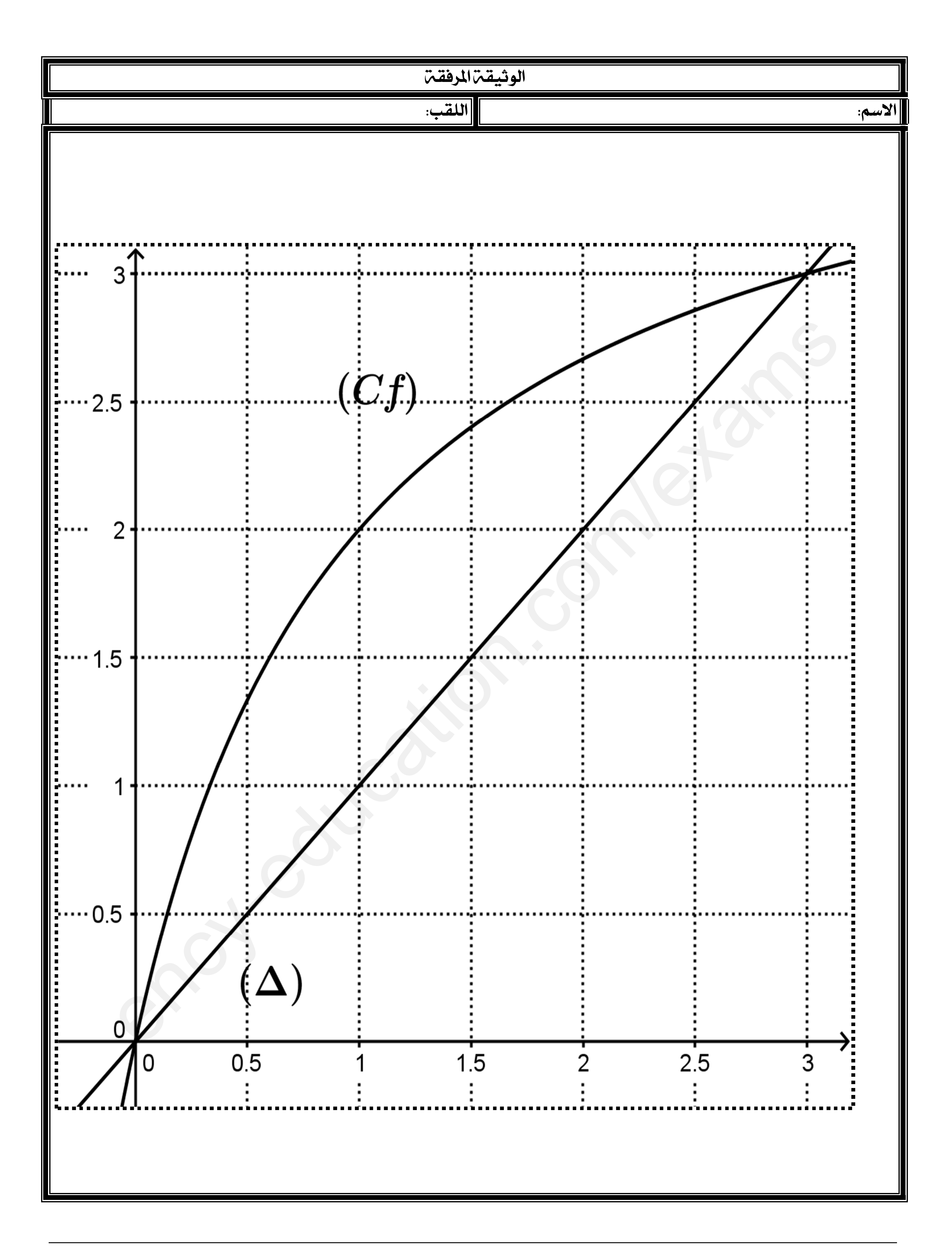
3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4. أ) أرسم كلا من (Δ)، (T) و (C_f). نقبل أن $\begin{cases}(C_f)\cap(xx')=\{(-0,5;0)\}\\ f(\alpha)=0,4\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين في الإشارة.

انتهـــــــــى الموضـــــوع الثاني


الوثيقة المرفقة
الاسم:
اللقب:
(Cf)
(Δ)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
ency-education.com/exams

التصحيح النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية

الموضوع الأول:

(0,5) 1) تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 على حامل محور الفواصل:

(0,25) إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها:

من البيان نلاحظ أن $U_0 < U_1 < U_2 < U_3 < ...$ وعليه (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ ونلاحظ أيضا أن (U_n) متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ $(x = 3)$

(0,75) 2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_n \leq 3$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $1 \leq U_n \leq 3$

- لدينا $U_0 = 1$ ولدينا أن $1 \leq 1 \leq 3$ فإن $P(0)$ صحيحة

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $1 \leq U_n \leq 3$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي البرهان أن $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

لدينا $1 \leq U_n \leq 3$ ومنه $2 \leq U_n + 1 \leq 4$ ومنه $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{U_n+1} \leq \frac{1}{2}$

ومنه $-2 \leq \frac{-4}{U_n+1} \leq -1$ ومنه $1 \leq 2 \leq 4 - \frac{4}{U_n+1} \leq 3$

وبالتالي $1 \leq U_{n+1} \leq 3$ وعليه $P(n+1)$ صحيحة

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_n \leq 3$

(0,5) ب) تبيان أن (U_n) متزايدة تماما:

لدينا

$$U_{n+1} - U_n = 4 - \frac{4}{U_n+1} - U_n = \frac{4U_n}{U_n+1} - U_n = \frac{4U_n - U_n^2 - U_n}{U_n+1}$$

ومنه

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n - U_n^2}{U_n+1} = \frac{U_n(3 - U_n)}{U_n+1}$$

لدينا $1 \leq U_n \leq 3$ ومنه $U_n + 1 > 0$ و $U_n \geq 0$ و $3 - U_n \geq 0$ وعليه $U_{n+1} - U_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

استنتاج أن (U_n) متقاربة:

بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

3) إثبات أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{4}(U_n - 3)$

لدينا $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4U_n}{U_n + 1} - 3 = \dfrac{4U_n - 3U_n - 3}{U_n + 1} = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$

لدينا مما سبق $0 \leq U_n \leq 3$ ومنه $U_n + 1 > 0$ و $U_n - 3 \leq 0$ وعليه $U_{n+1} - 3 \geq 0$ ... ①

(0,25)

استنتاج أن (U_n) متقاربة:

لما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

(0,75)

3) اثبات أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-U_n)$

لدينا: $3-U_{n+1} = 3-\frac{4U_n}{U_n+1} = \frac{3U_n+3-4U_n}{U_n+1} = \frac{3-U_n}{U_n+1}$

لدينا مما سبق $1 \leq U_n \leq 3$ ومنه $U_n+1>0$ و $3-U_n \geq 0$ وعليه

$3-U_{n+1} \geq 0$ —— (1)

لدينا $U_n \geq 1$ ومنه $U_n+1 \geq 2$ أي $\frac{1}{U_n+1} \leq \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{3-U_n}{U_n+1} \leq \frac{1}{2}(3-U_n)$ وبالتالي $3-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-U_n)$ —— (2)

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-U_n)$

(0,5)

ب) استنتاج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3-U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(3-U_0)$

لدينا مما سبق $0 \leq 3-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-U_n)$ ومنه

$0 \leq 3-U_1 \leq \frac{1}{2}(3-U_0)$ —— 1

$0 \leq 3-U_2 \leq \frac{1}{2}(3-U_1)$ —— 2

$\vdots$

$0 \leq 3-U_n \leq \frac{1}{2}(3-U_{n-1})$ —— n

بضرب المتراجحات 1، 2 ... n طرفا في طرف نجد:

$0 \leq (3-U_1)(3-U_2)\times\cdots\times(3-U_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(3-U_0)\times(3-U_1)\times\cdots\times(3-U_{n-1})$

وبالتالي: $0 \leq 3-U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(3-U_0)$

(0,5)

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

لما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(3-U_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 3-U_n \leq 0$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-U_n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

حل التمرين الثاني:

B B B V V

1) حساب P(A) و P(B):

(0,5) $P(A)=\frac{A_3^2+A_2^2}{A_5^2}=\frac{6+2}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

(0,5) $P(B)=\frac{2A_3^1\times A_2^1+A_3^2}{20}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$

2) حساب P(A∩B) ثم استنتاج P(A∪B):

(0,5) $P(A\cap B)=\frac{A_3^2}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

(0,5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{9}{10}-\frac{3}{10}=\frac{10}{10}=1$

(0,25×6) 3) تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X:

x_i	1	2	3
p_i	$P(X=1)=\frac{A_3^2}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$	$P(X=2)=\frac{2A_3^1A_2^1}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$	$P(X=3)=\frac{A_2^2}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

حساب الأمل الرياضياتي E(X):

(0,5) $E(X)=\sum_{i=1}^{3}p_i x_i=\frac{3}{10}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

$=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$

$\boxed{E(X)=\frac{9}{5}}$

ومنه

حل التمرين الثالث:

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-\sqrt{3})(z^2-\sqrt{3}z+1)=0$ (0,75)

لدينا $(z-\sqrt{3})(z^2-\sqrt{3}z+1)=0$ تكافئ $z=\sqrt{3}$ أو $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

لدينا $\Delta=3-4=-1=i^2$ ومنه المعادلة $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

تقبل حلين مترافقين هما: $z_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

و $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

وعليه حلول المعادلة (1) هي: $\sqrt{3}$ ، $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

II) لدينا $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_C=\overline{z_B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

و $z_D=\sqrt{3}$

1) تبيان أن النقطة A هي صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$: (0,5)

لدينا $z_{\overrightarrow{BA}}=z_A-z_B=\sqrt{3}+i-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

و $z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

بما أن $z_{\overrightarrow{BA}}=z_{\overrightarrow{CD}}$ فإن A هي صورة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$

استنتاج أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع: (0,25)

بما أن $z_{\overrightarrow{BA}}=z_{\overrightarrow{CD}}$ فإن الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

2) كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي: (0,25)

لدينا: $z_A=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

0,25x2 $z_B=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C=\overline{z_B}=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

تبيان أن $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{2021}\times(z_B)^{1441}\times(z_C)^{1962}=1$ (0,5)

لدينا: $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{2021}\times(z_B)^{1441}\times(z_C)^{1962}=e^{i\left(\frac{2021\pi+1441\pi-1962\pi}{6}\right)}$

$=e^{i\times 250\pi}=\cos(0)+i\sin 0=1$

3) لدينا $f(M)=M'$ معناه $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-i$

4) تعيين طبيعة التحويل النقطي f مع تحديد عناصره المميزة: (0,75)

لدينا $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-i$ مع $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\in\mathbb{C}^*$ و $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$

ومنه f دوران زاويته θ حيث $\theta=Arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة

$$z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

أي $$z_\Omega=\frac{-2i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{-2i\left(1+\sqrt{3}i\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=z_C$$

وبالتالي f دوران زاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$ ومركزه النقطة C.

5) تبيان أن النقطة B هي صورة D بالتحويل f: (0,25)

لدينا $$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_D-i=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt{3}-i$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-i=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=z_B$$

استنتاج طبيعة كل من المثلث BCD والرباعي $ABCD$ (0,75)

بما أن B هي صورة D بالتحويل f فإن $CB=CD$ و $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}$

وعليه المثلث BCD متقايس الأضلاع

لدينا مما سبق الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع وبما أن $CB=CD$

فإن $ABCD$ معين

4) تعيين طبيعة المجموعة (E) للنقط M حيث: (0,5) $(*)$ $Arg\left(z-z_B\right)=Arg\left(\bar{z}-\bar{z}_B\right)+2k\pi$

لدينا $(*)$ تكافئ $Arg\left(z-z_B\right)=Arg\left(\bar{z}-\bar{z}_B\right)+2k\pi$

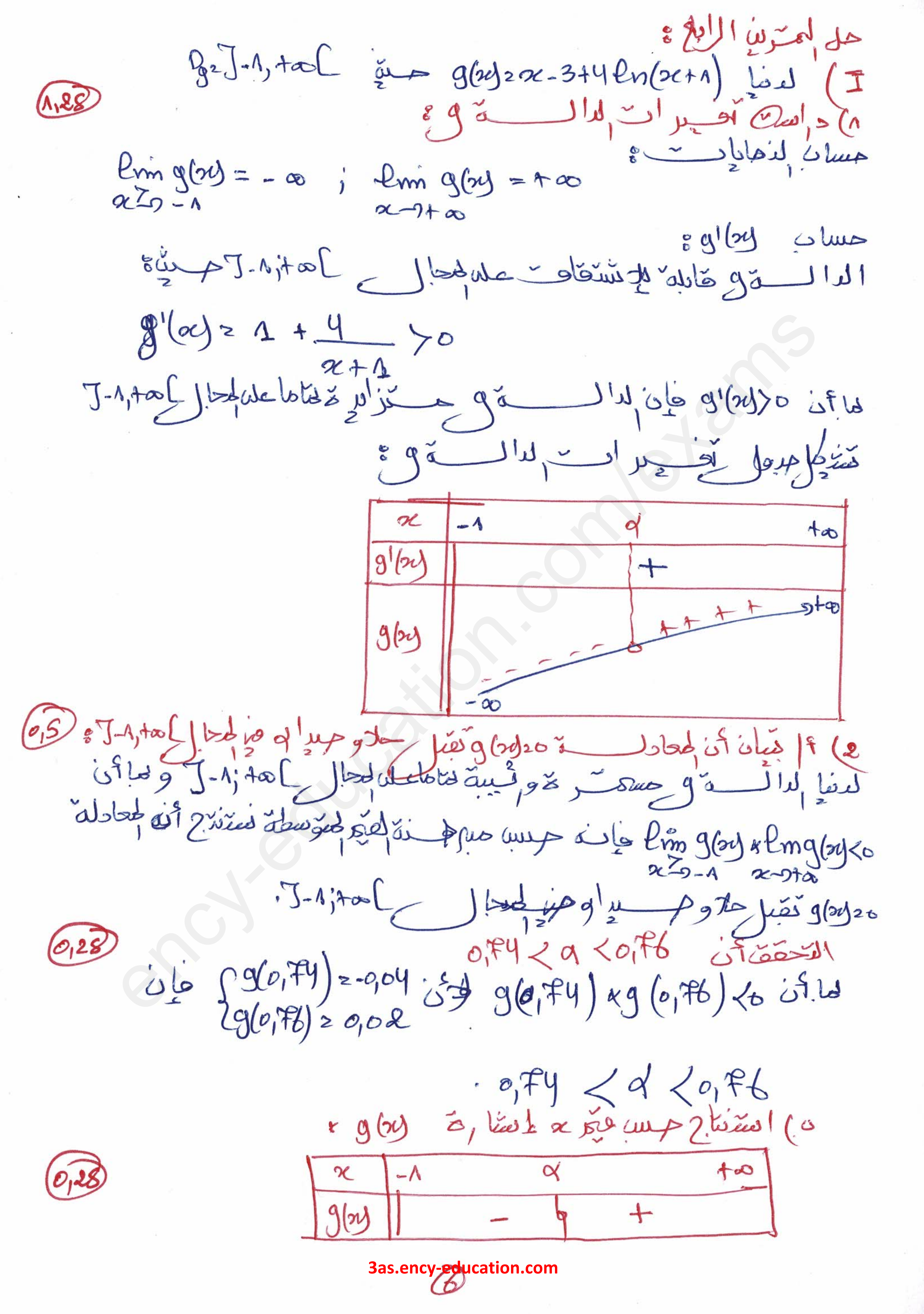
$Arg\left(z-z_B\right)=Arg\left(\overline{z-z_B}\right)+2k\pi$ 〃

$Arg\left(z-z_B\right)=-Arg\left(z-z_B\right)+2k\pi$ 〃

$Arg\left(z-z_B\right)^2=2k\pi$ 〃

وتكافئ $2Arg\left(z-z_B\right)=2k\pi$ أي $Arg\left(z-z_B\right)=k\pi$

أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=k\pi$ وبالتالي المجموعة (E) هي المستقيم (BM) الموازي لحامل محور الفواصل ماعدا النقطة B.



حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x)=x-3+4\ln(x+1)$ حيث $D_g=]-1,+\infty[$ — (1,25)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات:

$\lim_{x \to -1^{>}} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

حساب $g'(x)$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ حيث:

$$g'(x) = 1 + \frac{4}{x+1} > 0$$

بما أن $g'(x)>0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$

نشكل جدول تغيرات الدالة g:

x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2) أ) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,+\infty[$: — (0,5)

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و بما أن $\lim_{x \to -1^{>}} g(x) \times \lim_{x \to +\infty} g(x) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$.

التحقق أن $0,74 < \alpha < 0,76$ — (0,25)

بما أن $g(0,74) \times g(0,76) < 0$ لأن $\begin{cases} g(0,74) = -0,04 \\ g(0,76) = 0,02 \end{cases}$ فإن $0,74 < \alpha < 0,76$.

ب) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$: — (0,25)

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) لدينا: $f(x) = \ln(x+1) - 4\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ حيث $D_f =]-1, +\infty[$

1) أ) تبيان أن $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ و حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (0,5)

لدينا

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \ln(x+1)\left(1 - \frac{4}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) - 4\frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

ب) تبيان أنه من أجل $x \in]-1, +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ (0,5)

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1, +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{4}{x+1} \times (x+1) - 4\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{4 - 4\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-4+4\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

ومنه $f'(x) = \frac{x-3+4\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f: (0,5)

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) أ) تبيان أن ~~$f(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha+1}$~~ $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-3)^2}{4(\alpha+1)}$ (0,5)

لدينا $f(\alpha) = \ln(\alpha+1) - 4\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1}$ مع $\ln(\alpha+1) = \frac{3-\alpha}{4}$

ومنه $f(\alpha) = \frac{3-\alpha}{4} - \frac{3-\alpha}{\alpha+1} = (3-\alpha)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha+1}\right)$

$$= (3-\alpha)\left(\frac{\alpha-3}{4(\alpha+1)}\right) = -\frac{(\alpha-3)^2}{4(\alpha+1)}$$

ومنه $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-3)^2}{4(\alpha+1)}$

ب) أحسب دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ (0,25)

لدينا $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = 0$ لأن $f'(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^2} = 0$

(0,25)

التفسير البياني:

نقول أن (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α.

3) لدينا $h(x) = \ln(x+1)$ مع $D_h =]-1, +\infty[$

أ) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - h(x)$: (0,25)

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -4\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

(0,25) التفسير البياني:

نقول أن (C_f) و (C_h) متقاربان عند $+\infty$.

(0,5) ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h):

لدينا $f(x) - h(x) = 0$ تكافئ $-4\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ تكافئ $\ln(x+1) = 0$

أي $x+1 = 1$ ومنه $x = 0$ وعليه الوضع النسبي لـ (C_h) و (C_f)

يكون كالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-h(x)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) أعلى (C_h)	(C_f) يقطع (C_h)	(C_f) أسفل (C_h)	

4) أ) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات (0,75)

لدينا $f(x)=0$ تكافئ $\ln(x+1)\left(1-\frac{4}{x+1}\right)=0$

وتكافئ $\ln(x+1)=0$ أو $\frac{x-3}{x+1}=0$ ومنه $\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ أو

وعليه $(C_f)\cap(xx')=\{(0;0);(3;0)\}$

و $(C_f)\cap(yy')=\{(0;0)\}$

ب) رسم (C_f) ثم رسم (C') التمثيل البياني للدالة $|f|$: (0,5)

الموضوع الثاني:

حل التمرين الأول:

R1	R2	N1	
R1	R2	N2	N3

1) حساب احتمال كل من الحوادث التالية:

(0,8) $P(A) = \dfrac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$

(0,8) $P(B) = \dfrac{C_3^3 + C_3^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_1^1}{35} = \dfrac{13}{35}$

(0,8) $P(C) = \dfrac{C_3^3 + C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + 2 \times C_3^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_1^1}{35}$

$= \dfrac{31}{35}$

(2)

2) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

x_i	1	2	3	4	6	8	12
P_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$

$P(X=1) = \dfrac{C_3^3}{35} = \dfrac{1}{35}$, $P(X=2) = \dfrac{C_3^2 \times C_3^1}{35} = \dfrac{9}{35}$

$P(X=3) = \dfrac{C_3^2 \times C_1^1}{35} = \dfrac{3}{35}$, $P(X=4) = \dfrac{C_3^2 \times C_3^1}{35} = \dfrac{9}{35}$

$P(X=6) = \dfrac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{35} = \dfrac{9}{35}$, $P(X=8) = \dfrac{C_3^3}{35} = \dfrac{1}{35}$

$P(X=12) = \dfrac{C_3^2 \times C_1^1}{35} = \dfrac{3}{35}$

حساب $E(X)$:

(0,5) $E(X) = \dfrac{1+18+9+36+54+8+36}{35} = \dfrac{162}{35}$

حل التمرين الثاني:

لدينا $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} e U_n + \frac{2}{3} e^{n+1} \end{cases}$ و $V_n = U_n - e^n$

أ) 1/ تبيان أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}e$ يطلب حساب حدها الأول:

0,75

لدينا $V_{n+1} = U_{n+1} - e^{n+1} = \frac{1}{3} e U_n + \frac{2}{3} e^{n+1} - e^{n+1}$

$= \frac{1}{3} e U_n - \frac{1}{3} e^{n+1} = \frac{1}{3} e U_n - \frac{1}{3} e \times e^n$

ومنه $V_{n+1} = \frac{1}{3} e (U_n - e^n) = \frac{1}{3} e V_n$

وبالتالي (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}e$ وحدها الأول

$V_0 = U_0 - e^0 = 2 - 1 = 1$

0,25

ب) كتابة V_n بدلالة n:

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = V_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}e\right)^n$

0,25

استنتاج U_n بدلالة n:

لدينا $V_n = U_n - e^n$ ومنه $U_n = V_n + e^n = \left(\frac{1}{3}e\right)^n + e^n$

ج) حساب بدلالة n المجموع T_n حيث $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

0,75

$T_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}e} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}e} = \frac{3}{2}e\left(1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}\right)$

د) لدينا $W_n = \ln(U_n - V_n)$:

0,5

1/ التحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $W_n = n$

لدينا $W_n = \ln(U_n - V_n) = \ln e^n = n$

ب) تبيان أن (W_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

0,75

لدينا $W_{n+1} = W_n + 1$ ومنه (W_n) م ح أساسها 1 و

حدها الأول $W_0 = 0$

ج) لدينا $S_n = W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2$

البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

0,75

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

لدينا $W_1^2 = 1^2 = 1$ و $S_1 = \frac{1(2)\times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

ومنه $P(1)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة

أي نبرهن أن $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا $S_{n+1} = S_n + W_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

ومنه $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

ولدينا من جهة أخرى: $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$

وعليه $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

حل التمرين الثالث :

لدينا $z_A = 2i$. $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

1) أ) كتابة كلا من z_A . z_B و z_C على الشكل الأسي (المثلثي) : (1)

$z_A = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $z_B = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_C = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

استنتاج أن النقط A . B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها : (0,5)

لدينا $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ أي $OA = OB = OC = 2$

ومنه النقط A . B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_B^n حقيقيا سالبا تماما. (0,5)

z_B^n حقيقي سالب تماما معناه $\arg(z_B^n) = \pi + 2k\pi$ أي

$n\frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$ ومنه $n = 6 + 12k$

حيث $k \in \mathbb{N}$

2) أ) كتابة $\frac{z_C}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي : (0,5)

$\frac{z_C}{z_B} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

(0,25) $\frac{z_C}{z_B} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

ب) استنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي والجبري نجد :

(0,25×2)

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3) لدينا $f(M) = M'$ معناه $z' = 2iz + 4 + 2i$

- تبيان أن f تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة

لما أن $2i \in \mathbb{C}^*$ مع $|2i| \neq 1$ فإن f تشابه مباشر (0,25)
نسبته $k = |2i| = 2$ و زاويته $\theta = Arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ و مركزه (0,25×3)
النقطة ذات اللاحقة

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{4+2i}{1-2i} = \frac{(4+2i)(1+2i)}{5} = \frac{4+8i+2i-4}{5}$$

أي $z_\Omega = 2i = z_A$

4) تعيين طبيعة المجموعة (S) التي تحقق $|\bar{z} - \sqrt{3} + i| = |iz + 2|$ (0,75)

لدينا تكافئ $|\bar{z} - (\sqrt{3} - i)| = \left| i\left(z + \frac{2}{i}\right)\right|$

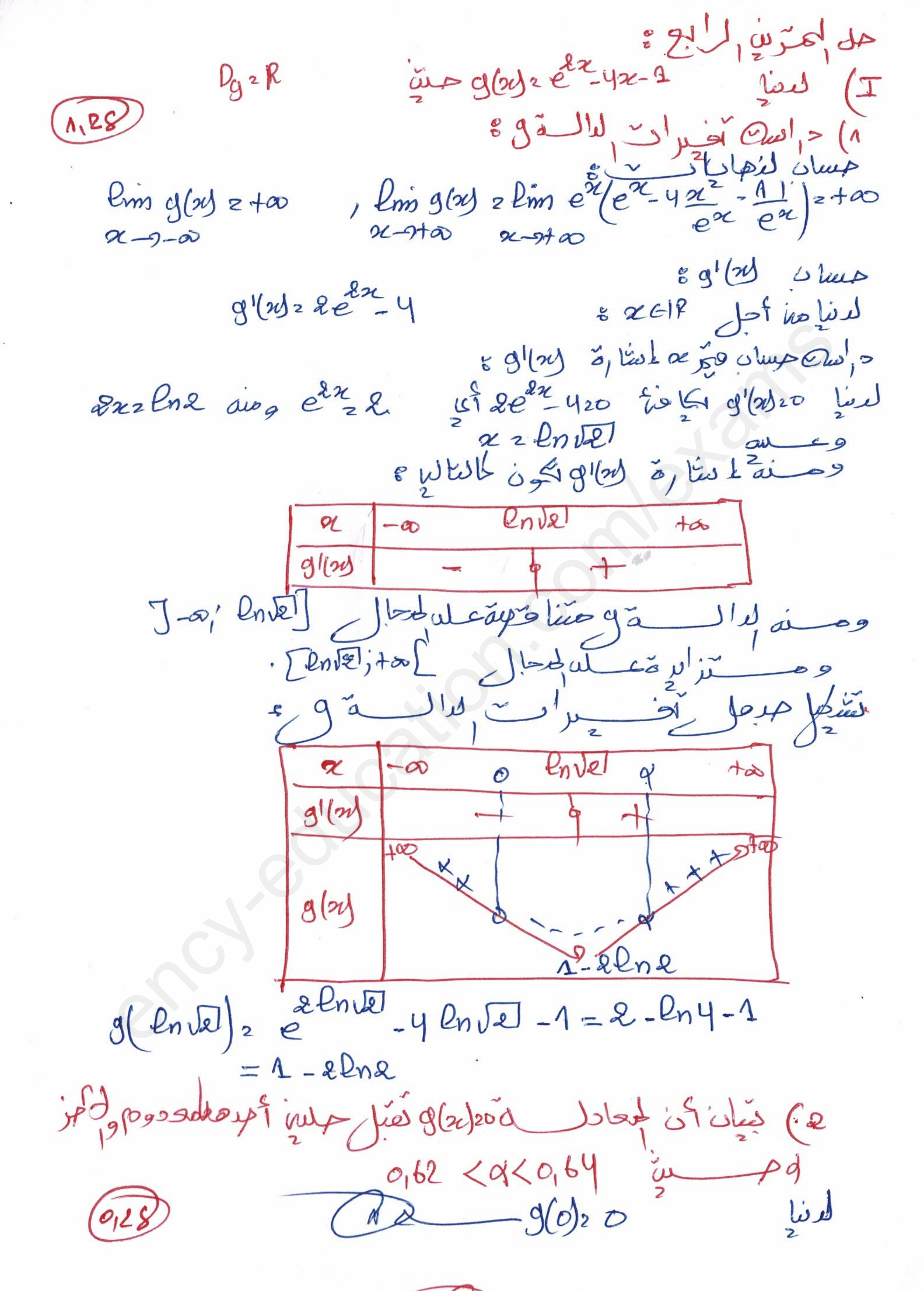
وتكافئ $|\bar{z} - \bar{z}_B| = |i||z - 2i|$

$|\overline{z - z_B}| = |z - z_A|$

$|z - z_B| = |z - z_A|$

$MA = MB$

ومنه المجموع S هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.



حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x)=e^{2x}-4x-1$ حيث $D_g=\mathbb{R}$

(1,25)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}-4\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)=+\infty$

حساب $g'(x)$:

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=2e^{2x}-4$

دراسة حساب قيم و اشارة $g'(x)$:

لدينا $g'(x)=0$ تكافئ $2e^{2x}-4=0$ أي $e^{2x}=2$ ومنه $2x=\ln 2$

وعليه $x=\ln\sqrt{2}$

ومنه اشارة $g'(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\ln\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;\ln\sqrt{2}]$

ومتزايدة على المجال $[\ln\sqrt{2};+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		0		$\ln\sqrt{2}$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$1-2\ln 2$	↗	0	↗	$+\infty$

$g(\ln\sqrt{2})=e^{2\ln\sqrt{2}}-4\ln\sqrt{2}-1=2-\ln 4-1$

$=1-2\ln 2$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر α

حيث $0,62<\alpha<0,64$

(0,25)

لدينا $g(0)=0$

(0,5) لدينا الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]\ln\sqrt{2};+\infty[$

و المجال $]0{,}62;0{,}64[$ محتوى في المجال و $g(0{,}62)\times g(0{,}64)<0$

لأن $\begin{cases} g(0{,}62)=-0{,}02 \\ g(0{,}64)=0{,}03 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0{,}62;0{,}64[$ — ②

من ① و ② نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم

والآخر موجب حيث $0{,}62<\alpha<0{,}64$

(0,5)

ب) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) حيث $f(x)=\left(2x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}+x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}+x-1=-\infty$$

(0,25×2)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{2e^{2x}}+x-1=+\infty$$

(0,5)

ب) تبيان أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-2x}g(x)$:

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=2e^{-2x}-2e^{-2x}\left(2x+\frac{3}{2}\right)+1$$

$$=e^{-2x}\left(2-4x-3+e^{2x}\right)=e^{-2x}\left(e^{2x}-4x-1\right)$$

ومنه

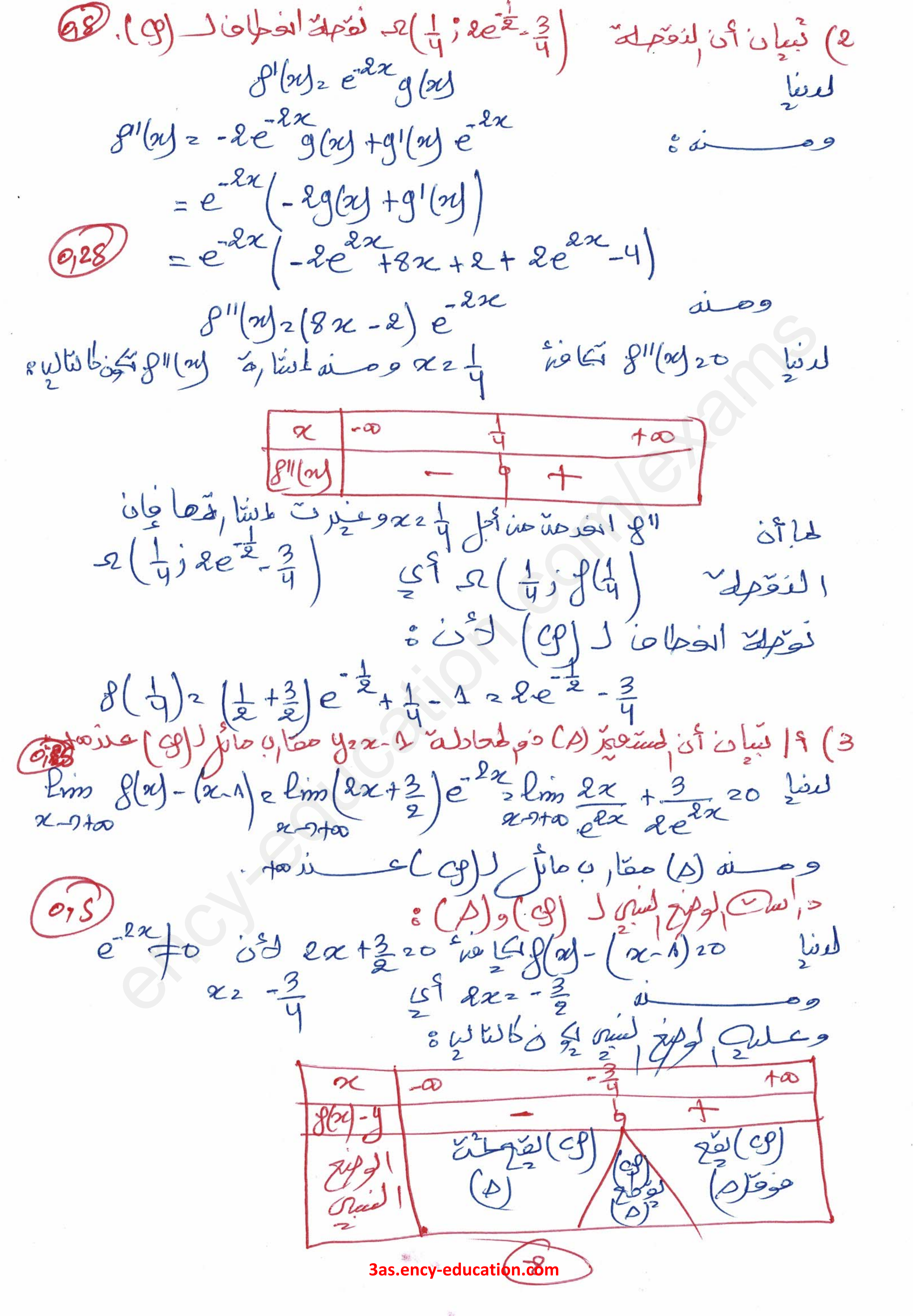
$$f'(x)=e^{-2x}g(x)$$

نشكل جدول تغيرات الدالة f:

$f(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

(0,5)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$



2) تبيان أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{4} ; 2e^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f). (0,5)

لدينا $f'(x)=e^{-2x}g(x)$

ومنه: $f''(x)=-2e^{-2x}g(x)+g'(x)e^{-2x}$

$$=e^{-2x}\left(-2g(x)+g'(x)\right)$$

(0,25)

$$=e^{-2x}\left(-2e^{2x}+8x+2+2e^{2x}-4\right)$$

ومنه $f''(x)=(8x-2)e^{-2x}$

لدينا $f''(x)=0$ تكافئ $x=\frac{1}{4}$ ومنه اشارة $f''(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

لما أن f'' انعدمت من أجل $x=\frac{1}{4}$ وغيرت اشارتها فإن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{4} ; f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ أي $\Omega\left(\frac{1}{4} ; 2e^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f) لأن:

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}-1=2e^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}$$

3) أ/ تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ (0,25)

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{2e^{2x}}=0$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

(0,5) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ):

لدينا $f(x)-(x-1)=0$ تكافئ $2x+\frac{3}{2}=0$ لأن $e^{-2x}\neq 0$

ومنه $2x=-\frac{3}{2}$ أي $x=-\frac{3}{4}$

وعليه الوضع النسبي يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

ت) تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له

لدينا $f'(x) = 1$ يكافئ $g(x) = e^{2x}$ أي $-4x - 1 = 0$ ومنه (0,5)

ومنه $x = -\frac{1}{4}$ وعليه (C_f) يقبل مماسا (T) موازي لـ (Δ) معادلته هي:

$$y = x + \frac{1}{4} + f\left(-\frac{1}{4}\right)$$

لدينا $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} = \sqrt{e} - \frac{5}{4}$

ومنه $y = x + \frac{1}{4} + \sqrt{e} - \frac{5}{4}$ ومنه معادلة لـ (T)

$$\boxed{y = x + \sqrt{e} - 1}$$

هي:

4) أ/ رسم كلا من (Δ) . (T) و (C_f) : (0,75)

(T)

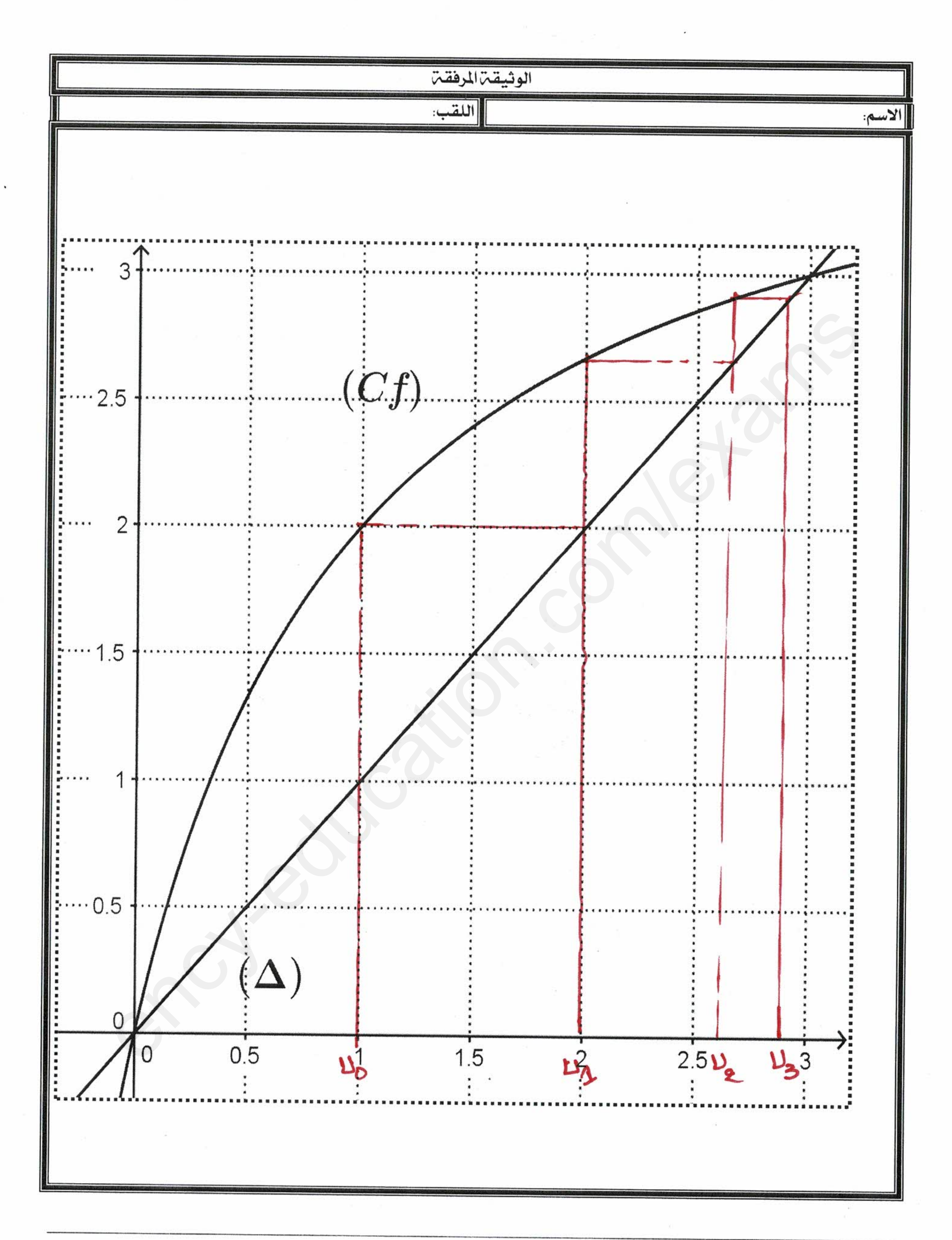
(D)

(C_f)

د) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين في الإشارة:

0,28

لدينا من أجل $m \in]-1; \frac{1}{2}[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.



الوثيقة المرفقة
الاسم:
اللقب:
(Cf)
(Δ)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
u_0
u_1
u_2
u_3

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2021

شعبة: التقني رياضي — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضــــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

I. f الدالة المعرفة على المجال $I=[0;1]$ بـ: $f(x)=xe^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن الدالة f متزايدة على المجال I.
2. بين أنه من أجل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$.

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$.

   ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

   ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 4،2،2 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 2، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0، 1.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس و نعتبر الحادثتين A و B حيث A: سحب ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى و B: سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب:
2. بين أن $P(A\cap B)=\frac{5}{56}$ ثم استنتج $P(A\cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
   - ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

1. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 9.

ب) بين أن العدد $5\times 2^{2021}+1441^{1962}+8^{1954}$ مضاعف للعدد 9.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2018^{6n+4}+2n+3\equiv 0[9]$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث $a_n=1+2+4+...+2^n$.

أ) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_n=2^{n+1}-1$ ثم عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n\equiv 0[9]$.

ب) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+1}=2a_n+1$ ثم استنتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=\frac{x}{x+1}+\ln(2)-\ln(x+1)$ و جدول تغيراتها المقابل.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$ln(2)$	↘ $-\infty$

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$ و $3{,}2<\beta<3{,}4$.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ثم أحسب $\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. بين أن $f(\beta)=\beta-2\ln(2)-1+\frac{1}{\beta+1}$ ثم اعط حصرا لـ $f(\beta)$.

3. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين احداثييها.

ب) أكتب معادلة للمماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة Ω.

4. أ) أرسم كلا من (Δ) و (C_f) يعطى $(C_f)\cap(xx')=\{(0;0),(7{,}26;0),(-0{,}88;0)\}$ و $\begin{cases}\alpha=-0{,}63\\ f(\alpha)=-0{,}33\end{cases}$ ، $\begin{cases}\beta=3{,}31\\ f(\beta)=1{,}16\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=|m|x$ ثلاث حلول متمايزة.

ج) وضح كيف يمكن رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=-f(x)$ انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

انتهـــــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية: $5x-7y=13$ حيث x و y عددان صحيحان.

1. بين أنه إذا كان العدد الطبيعي d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y فإن $d=1$ أو $d=13$.
2. أ) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$.

   ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).
3. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$.
4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{56\beta 5}$ في النظام ذي الأساس 7 و يكتب $\overline{310\alpha 1}$ في النظام ذي الأساس 5 حيث α و β عددان طبيعيان.
   - ✓ جد العددين α و β ثم أكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين الثاني: 04 نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n+2n+1 \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n^2$.
2. ليكن المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.
   - ✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $u_{n+1}\equiv u_n\,[5]$.
4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{u_{n+1}-u_n}$.

   أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول ثم أكتب v_n بدلالة n.

   ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n' حيث $S_n'=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_{n-1}$ ثم استنتج مرة أخرى أن $u_n=n^2$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

I. عين العددين المركبين α و β حيث $\begin{cases} 2\alpha-\sqrt{3}\beta=3\sqrt{3}-i \\ \alpha i-\beta=0 \end{cases}$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$، $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C=-1+\sqrt{3}i$.

1. أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقي سالب تماما.
2. أكتب z_B على الشكل المثلثي و الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و حدد طبيعة المثلث OAC ثم عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول النقطة A إلى النقطة C محددا عناصره المميزة.

ج) بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ ثم استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع.

4. عين طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $Arg\left(\frac{z_A-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi$ مع k عدد صحيح.

<u>التمرين الرابع: 07 نقاط</u>

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=2e^x-ex-e$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 والأخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2e^{-x}+\frac{1}{2}ex^2-ex$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $[-1;-\alpha]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. عين دون حساب $\lim_{x\to-\alpha}\frac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.
4. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-ex$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

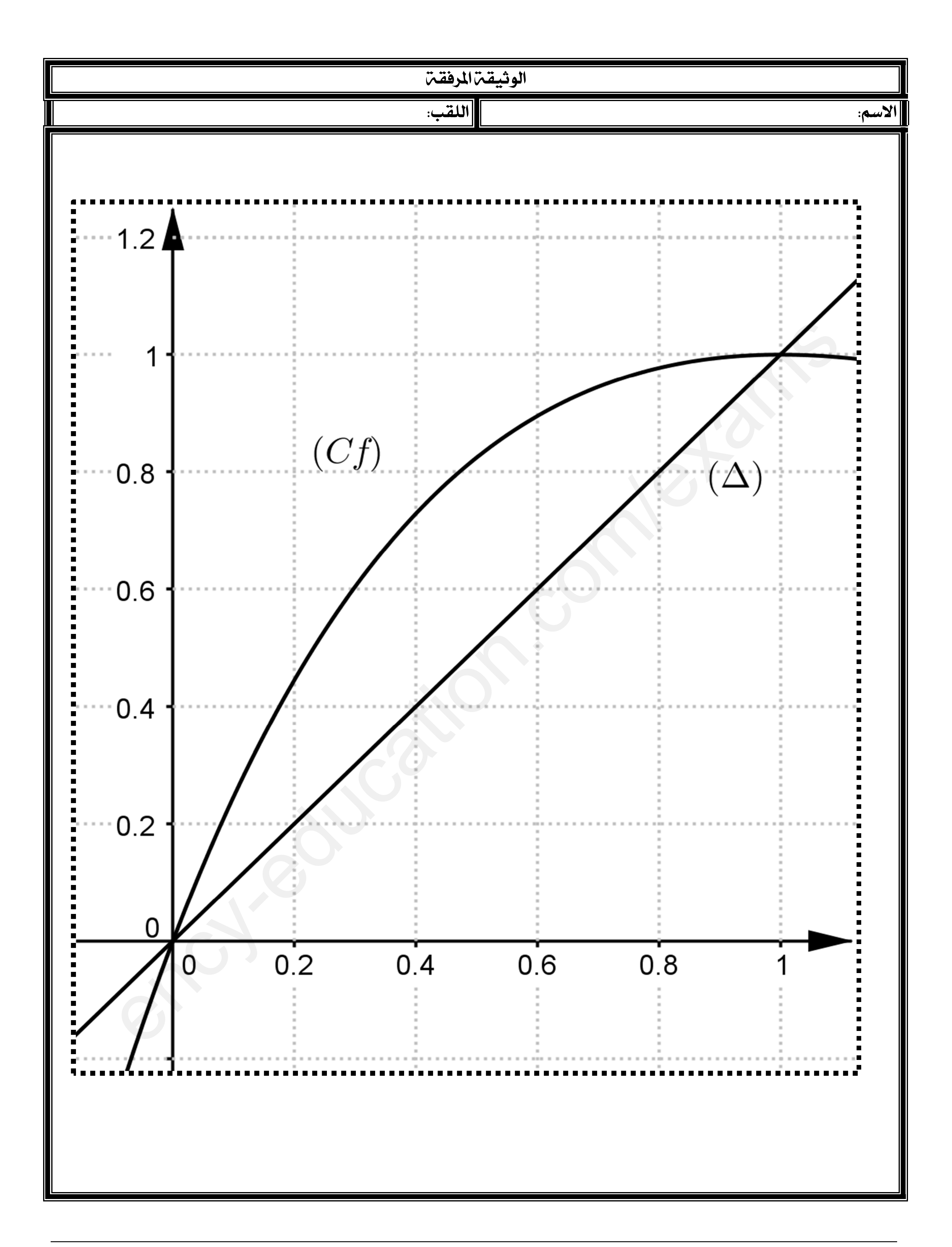
أ. أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h).

5. أ) أحسب $f(0)$ ثم أرسم (C_f). نقبل أن $\begin{cases}(C_f)\cap(xx')=\{(2,1;0)\}\\ f(-\alpha)=-2,24\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=m$ حلين موجبين و حل سالب.

انتهـــــــــــى الموضـــــوع الثاني


الوثيقة المرفقة
الاسم:
اللقب:
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
(Cf)
(Δ)

التصحيح لنموذجي اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

المستوى: 3 ت ر

الموضوع الأول:

حل التمرين الأول:

I) (0,8)

1) تبيان أن الدالة f متزايدة على المجال I:

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I حيث:

$f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$

لدينا $f'(x)=0$ تكافئ $x=1$ لأن $e^{1-x}\neq 0$

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $1-x$ لأن $e^{1-x}>0$

وعليه من أجل $x\in I$ فإن $f'(x)\geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على I.

2) تبيان أنه من أجل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$ (0,8)

لدينا $x\in I$ معناه $x\in[0;1]$ ومنه $f(x)\in[f(0);f(1)]$

لأن الدالة f متزايدة على I.

لدينا

$f(0)=0$ و $f(1)=1$

ومنه من أجل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$.

II) لدينا
$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{5} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1) تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل: (0,8)

(0,8) وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

من البيان نلاحظ أن: $u_0<u_1<u_2<u_3<\cdots$ وعليه يبدو أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. ومتقاربة نحو العدد 1 (فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)).

0,75

2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 1$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $0 < U_n < 1$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $U_0 = \frac{1}{5}$ و $0 < \frac{1}{5} < 1$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $0 < U_n < 1$ ولنبرهن أن

$P(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $0 < U_{n+1} < 1$

لدينا $0 < U_n < 1$ وبما أن f متزايدة على I فإن $f(0) < f(U_n) < f(1)$

أي $0 < U_{n+1} < 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < U_n < 1$$

0,5

ب) تبيان أن (U_n) متزايدة تماما :

لدينا

$$U_{n+1} - U_n = U_n e^{1-U_n} - U_n = U_n\left(e^{1-U_n} - 1\right)$$

لدينا حسب السابق $0 < U_n < 1$ ومنه $-1 < -U_n < 0$ ومنه

$0 < 1 - U_n < 1$ أي $1 < e^{1-U_n} < e$

ومنه

$$0 < e^{1-U_n} - 1 < e - 1$$

وعليه $e^{1-U_n} - 1 > 0$ وبالتالي $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

0,25

استنتاج أن (U_n) متقاربة :

لدينا (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ومنه فهي متقاربة.

0,5

جـ) حساب $\lim_{n \to +\infty} U_n$:

بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$ / $\ell \in \mathbb{R}$ حيث ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

لدينا $f(\ell) = \ell$ تكافئ $\ell e^{1-\ell} = \ell$ ومنه $\ell\left(e^{1-\ell} - 1\right) = 0$

أي $\ell = 0$ أو $e^{1-\ell} = e^0$ ومنه $\ell = 1$

وبما أن $0 < U_n < 1$ و (U_n) متزايدة تماما فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

حل التمرين الثاني:

B_2	R_0	V_0
B_2	R_2	V_1
B_4	R_2	

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

(0,5) $P(A) = \dfrac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \dfrac{18}{56} = \dfrac{9}{28}$

(0,5) $P(B) = \dfrac{C_1^1 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_2^1}{56} = \dfrac{1+12}{56} = \dfrac{13}{56}$

2) تبيان أن: $P(A\cap B) = \dfrac{5}{56}$

لدينا

(0,5) $P(A\cap B) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{56} = \dfrac{5}{56}$

استنتاج $P(A\cup B)$:

(0,5)

لدينا

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= \dfrac{18}{56} + \dfrac{13}{56} - \dfrac{5}{56} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$

3) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

(1,5)

x_i	0	4	8	16
p_i	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{3}{28}$

$P(X=0) = \dfrac{C_2^2 \times C_6^1 + C_2^1 \times C_6^2}{56} = \dfrac{6+30}{56} = \dfrac{36}{56} = \dfrac{9}{14}$

$P(X=4) = \dfrac{C_1^1 \times C_4^2}{56} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$, $P(X=8) = \dfrac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_4^3}{56} = \dfrac{1}{7}$

$P(X=16) = \dfrac{C_4^2 \times C_1^1}{56} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$

حساب $E(X)$:

(0,5) $E(X) = \dfrac{12 + 32 + 48}{28} = \dfrac{92}{28} = \dfrac{23}{7}$

(3)

حل التمرين الثالث:

1) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9: (1,25)

من أجل $n=0$ فإن $2^0=1\equiv 1[9]$

من أجل $n=1$ فإن $2^1=2\equiv 2[9]$

من أجل $n=2$ فإن $2^2=4\equiv 4[9]$

من أجل $n=3$ فإن $2^3=8\equiv 8[9]$

من أجل $n=4$ فإن $2^4=16\equiv 7[9]$

من أجل $n=5$ فإن $2^5=32\equiv 5[9]$

من أجل $n=6$ فإن $2^6\equiv 64\equiv 1[9]$

وعليه بواقي قسمة 2^n على 9 نلخصها في الجدول التالي:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$n\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	8	7	5	$[9]$

ب) تبيان أن العدد $5\times 2^{2021}+1441^{1962}+8^{1954}$ مضاعف للعدد 9: (1)

لدينا $2021=336\times 6+5$ ومنه $2^{2021}\equiv 5[9]$

ومنه $5\times 2^{2021}\equiv 25[9]$ أي

$5\times 2^{2021}\equiv 7[9]$

لدينا $1441\equiv 1[9]$ ومنه $1441^{1962}\equiv 1[9]$

ولدينا $8\equiv -1[9]$ ومنه $8^{1954}\equiv 1[9]$

وعليه $5\times 2^{2021}+1441^{1962}+8^{1954}\equiv 9[9]$

$\equiv 0[9]$

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $2018^{6n+4}+2n+3\equiv 0[9]$ (0,75)

لدينا $2018\equiv 2[9]$ ومنه $2018^{6n+4}\equiv 2^{6n+4}[9]$

ومنه $2018^{6n+4}\equiv 7[9]$

ومنه $2018^{6n+4}+2n+3\equiv 0[9]$ تكافئ $2n+10\equiv 0[9]$

ومنه $2n+1\equiv 0[9]$ أي $2n\equiv -1[9]$ ومنه $2n\equiv 8[9]$

وعليه $2n \equiv 2 \times 4 [9]$ أي $n \equiv 4 [9]$ لأن 2 و 9 أوليان فيما بينهما ومنه $n = 9k+4$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 1+2+4+\dots+2^n$

أ/ تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 2^{n+1} - 1$

0,5

لدينا $a_n = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$

لأن 2^n هي n حدا متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول ذو الدليل 0 هو 1.

0,5

تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $a_n \equiv 0 [9]$

لدينا $a_n \equiv 0 [9]$ معناه $2^{n+1} - 1 \equiv 0 [9]$ ومعناه $2^{n+1} \equiv 1 [9]$

وعليه $n+1 = 6k$ ومنه $n = 6k-1$ أي $n = 6k+5$

حيث $k \in \mathbb{N}$.

0,5

ب) تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 2a_n + 1$

لدينا $a_{n+1} = 2^{n+1+1} - 1 = 2 \times 2^{n+1} - 2 + 1$

ومنه $a_{n+1} = 2(2^{n+1} - 1) + 1$

وعليه: $a_{n+1} = 2a_n + 1$

0,5

استنتاج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما:

لدينا $a_{n+1} = 2a_n + 1$ تكافئ $a_{n+1} - 2a_n = 1$ وعليه

حسب مبرهنة بيزو ينتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

حل التمرين الرابع

I) $g(x)=\frac{x}{x+1}+\ln 2-\ln(x+1)$ حيث $D_g=]-1;+\infty[$

(1)

1/ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث

$-0,7<\alpha<-0,6$ و $3,2<\beta<3,4$

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجالين $]-0,7;-0,6[$ و $]3,2;3,4[$

و $g(-0,7)\times g(-0,6)<0$ ، $g(3,2)\times g(3,4)<0$

لأن
$\begin{cases} g(-0,7)= \\ g(-0,6)=0 \end{cases}$
$\begin{cases} g(3,2)= \\ g(3,4)= \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0,7<\alpha<-0,6$ و $3,2<\beta<3,4$

(0,5)

2) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	-1	α		β	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

II) لدينا $f(x)=(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)$

1) أ) تبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ثم حساب $\lim_{x\to-1} f(x)$

لدينا

(0,5)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\left(\frac{(2+\ln 2)x}{x+2}-\ln(x+1)\right)=-\infty$$

(0,25)
$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)=+\infty$$

(0,5)

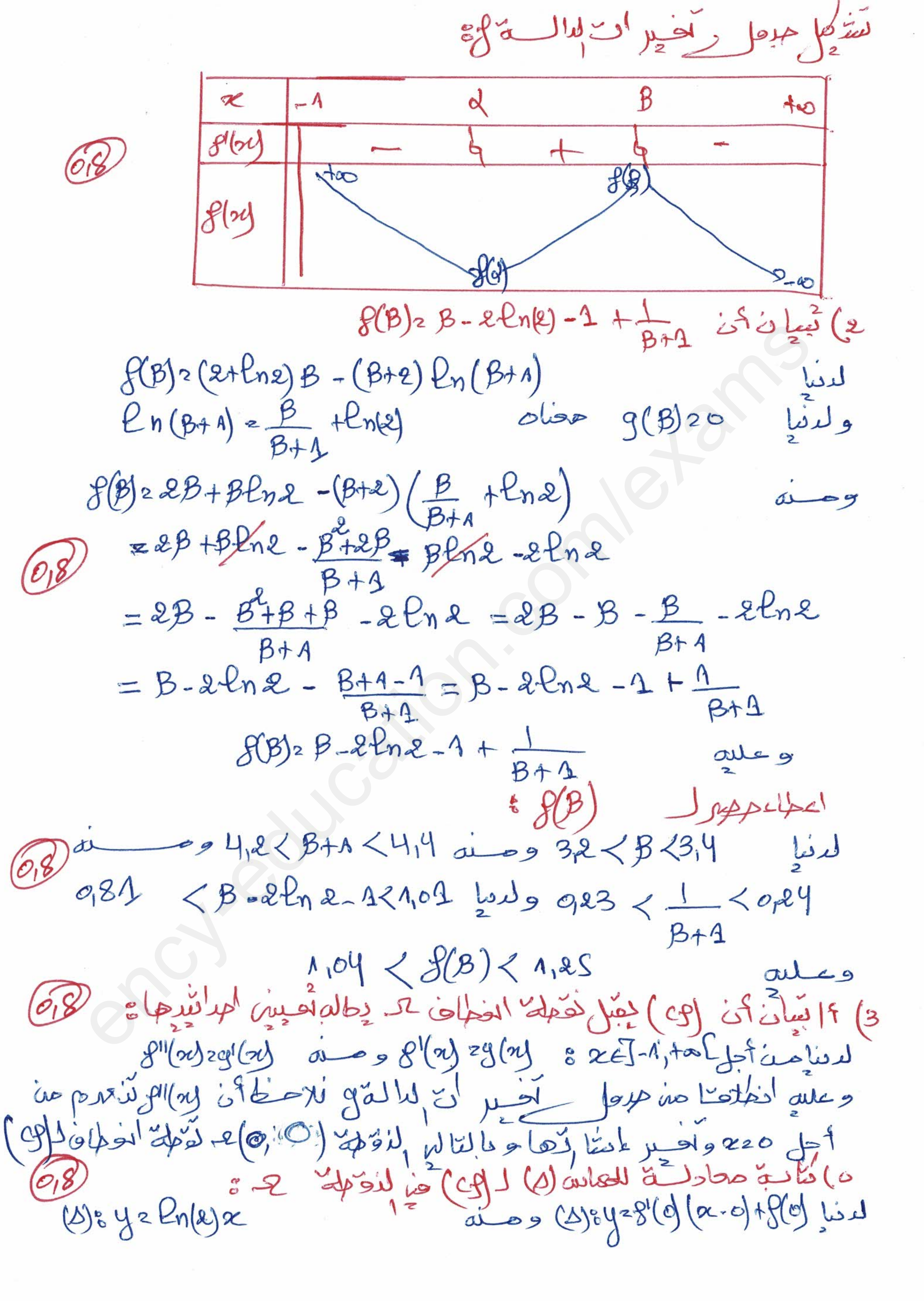
ب) تبيان أنه من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

لدينا من أجل $x\in]-1;+\infty[$ فإن:

$$f'(x)=2+\ln 2-\left(\ln(x+1)+\frac{x+2}{x+1}\right)=2+\ln 2-\ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}$$

ومنه
$$f'(x)=\frac{2x+2-x-2}{x+1}+\ln 2-\ln(x+1)$$

ومنه
$$f'(x)=\frac{x}{x+1}+\ln 2-\ln(x+1)=g(x)$$



تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	$-\infty$

(0,8)

2) تبيان أن $f(\beta)=\beta-2\ln(2)-1+\frac{1}{\beta+1}$

لدينا $f(\beta)=(2+\ln 2)\beta-(\beta+2)\ln(\beta+1)$

ولدينا $g(\beta)=0$ معناه $\ln(\beta+1)=\frac{\beta}{\beta+1}+\ln(2)$

ومنه $f(\beta)=2\beta+\beta\ln 2-(\beta+2)\left(\frac{\beta}{\beta+1}+\ln 2\right)$

$=2\beta+\beta\ln 2-\frac{\beta^2+2\beta}{\beta+1}-\beta\ln 2-2\ln 2$

$=2\beta-\frac{\beta^2+\beta+\beta}{\beta+1}-2\ln 2=2\beta-\beta-\frac{\beta}{\beta+1}-2\ln 2$

$=\beta-2\ln 2-\frac{\beta+1-1}{\beta+1}=\beta-2\ln 2-1+\frac{1}{\beta+1}$

وعليه $f(\beta)=\beta-2\ln 2-1+\frac{1}{\beta+1}$

(0,8)

اعطاء حصر لـ $f(\beta)$:

لدينا $3,2<\beta<3,4$ ومنه $4,2<\beta+1<4,4$ ومنه

$0,81<\beta-2\ln 2-1<1,01$ ولدينا $0,23<\frac{1}{\beta+1}<0,24$

وعليه $1,04<f(\beta)<1,25$

(0,8)

3) أ) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين احداثيتها:

لدينا من أجل $x\in]-1,+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ومنه $f''(x)=g'(x)$

وعليه انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=0$ وتغير اشارتها وبالتالي النقطة $\omega(0;0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

(0,8)

ب) كتابة معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة ω :

لدينا $(\Delta): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $(\Delta): y=\ln(2)x$

(0.48)

4) أرسم كلا من (Δ) و (C_f):

ب) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=|m|x$ ثلاث حلول متمايزة:

لدينا من أجل $f(m)\in]f(\alpha);f(\beta)[$ أي ($m\in$

لدينا من أجل $0\leq|m|<\ln 2$ أي من أجل $|m|\geq 0$ و $|m|<\ln 2$

ومنه من أجل $m\in]-\ln 2;\ln 2[$ فإن المعادلة $f(x)=|m|x$ تقبل ثلاث حلول متمايزة

(0.18)

ج) توضيح كيفية رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x) = -f(x)$ انطلاقا من (C_f) ثم رسمه في نفس المعلم السابق. (0,5)

بما أن $h(x) = -f(x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

الموضوع الثاني:

حل التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية: $5x-7y=13$

1) تبيان أنه إذا كان $PGCD(x;y)=d$ فإن $d=1$ أو $d=13$:

(0,5)

لدينا $d|x$ و $d|y$ ومنه $d|5x-7y$ أي $d|13$

ولما أن 13 عدد أولي فإن $d=1$ أو $d=13$

2) أ) إيجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$

(0,5)

لدينا $\begin{cases} 5x_0-7y_0=13 & (1) \\ x_0-y_0=13 & (2) \end{cases}$ ومنه من (2) نجد أن $y_0=x_0-13$ ومنه

$5x_0-7x_0+91=13$

ومنه $2x_0=78$ إذن $x_0=39$

وعليه $y_0=39-13=26$ ومنه الحل الخاص للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$ هو الثنائية $(39;26)$

(0,75)

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E):

ط1: لدينا $\begin{cases} 5x-7y=13 \\ 5\times 39-7\times 26=13 \end{cases}$ ومنه $5(x-39)-7(y-26)=0$

أي $5(x-39)=7(y-26)$ ولما أن 5 و7 أوليان فيما بينهما فإن حسب مبرهنة غوص $\begin{cases} 5|y-26 \\ 7|x-39 \end{cases}$ أي $\begin{cases} y-26=5k \\ x-39=7k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=7k+39 \\ y=5k+26 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x=7k+4 \\ y=5k+1 \end{cases}$ حيث k عدد صحيح $\mathbb{Z}$.

ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(7k+4;5k+1)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ط2:

لدينا $5x-7y=13$ ومنه $5x=7y+13$ أي $5x\equiv 13[7]$

ومنه $5x\equiv 20[7]$ أي $5x\equiv 5\times 4[7]$ ومنه $x\equiv 4[7]$

لأن 5 و 7 أوليان فيما بينهما. ومنه $x=7k+4$

ولدينا $7y=5x-13$ أي $7y\equiv -13[5]$ ومنه $7y\equiv 2[5]$

أي $7y\equiv 7[5]$ ومنه $y\equiv 1[5]$ ومنه $y=5k+1$

وعليه حلول المعادلة هي الثنائيات $(7k+4;5k+1)/k\in\mathbb{Z}$

3) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$ (0,75)

$PGCD(x;y)=13$ تكافئ $\begin{cases}13 \mid x\\ 13 \mid y\end{cases}$ أي $\begin{cases}x\equiv 0[13]\\ y\equiv 0[13]\end{cases}$ ومنه

$\begin{cases}7k+4\equiv 0[13]\\ 5k+1\equiv 0[13]\end{cases}$ أي $\begin{cases}7k\equiv 9[13]\\ 5k\equiv 12[13]\end{cases}$ أي $\begin{cases}7k\equiv 35[13]\\ 5k\equiv 25[13]\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}7k\equiv 7\times 5[13]\\ 5k\equiv 5\times 5[13]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k\equiv 5[13]\\ k\equiv 5[13]\end{cases}$

لأن $PGCD(7;13)=1$ و $PGCD(5;13)=1$

وعليه $k=13p+5$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

ومنه $\begin{cases}x=7(13p+5)+4\\ y=5(13p+5)+1\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=91p+39\\ y=65p+26\end{cases}$

وعليه الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$

هي $(91p+39;65p+26)$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

4) لدينا $N=\overline{310\alpha 1}^{5}$ و $N=\overline{56\beta 5}^{7}$

حيث α و β عددان طبيعيان:

إيجاد العددين α و β:

لدينا $0\leq\alpha\leq 4$ / $0\leq\beta\leq 4$

$N=5\times 7^3+6\times 7^2+7\beta+5=7\beta+2014$

$N=3\times 5^4+5^3+5\alpha+1=5\alpha+2001$

ومنه $5\alpha+2001=7\beta+2014$ أي $5\alpha-7\beta=13$ (1)

وعليه بالمطابقة مع المعادلة (E) فإن $\begin{cases}\alpha=x\\ \beta=y\end{cases}$ أي $\alpha=7k+4$ ، $\beta=5k+1$

ومنه $\alpha=4$ و $\beta=1$ لأن $0\leq\alpha\leq 4$ ، $0\leq\beta\leq 4$ معناه $k=0$

كتابة N في النظام العشري:

لدينا

(0,25) $\begin{cases}N=2014+7\times 1=2021\\ N=2001+5\times 4=2021\end{cases}$ أو

حل التمرين الثاني:

لدينا $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 1 \end{cases}$

(0,75)

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = n^2$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $U_n = n^2$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $U_0 = 0 = 0^2$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $U_n = n^2$ ولنبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن $U_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا

$U_{n+1} = U_n + 2n + 1$

وبما أن $U_n = n^2$ فإن

$U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = n^2$$

2) لدينا $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (α)

(0,75)

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية (α)

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0 = U_0$

نفترض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ ولنبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن:

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

وبما أن

$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$

فإن:

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(0,5)

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يتحقق $U_{n+1} \equiv U_n [5]$

لدينا $U_{n+1} \equiv U_n [5]$ تكافئ $U_{n+1} - U_n \equiv 0 [5]$ أي $(2n+1)$

$2n+1 \equiv 0 [5]$ ومنه $2n \equiv -1 [5]$ أي $2n \equiv 4 [5]$

ومنه $2n \equiv 2\times 2 [5]$ أي $n \equiv 2 [5]$ لأن 2 و 5 أوليان فيما بينهما.

ومنه $n = 5k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

4) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = e^{U_{n+1} - U_n}$

4) تبيان أن (V_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول :

(0,75)

ط1 لدينا $V_n = e^{U_{n+1} - U_n} = e^{2n+1}$

ومنه $V_{n+1} = e^{2n+2+1} = e^2 \times e^{2n+1} = e^2 V_n$

وعليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول $V_0 = e$

ط2 : $V_{n+1} = e^{U_{n+2} - U_{n+1}} = e^{U_{n+1} + 2n + 3 - U_n - 2n - 1}$

$= e^{U_{n+1} - U_n + 2} = e^2 \times e^{U_{n+1} - U_n} = e^2 V_n$

وعليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول $V_0 = e$

كتابة V_n بدلالة n : $V_n = V_0 \times q^n = e \times (e^2)^n = e^{2n+1}$

5) حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \cdots + \ln V_{n-1}$

ط1 : لدينا $\ln V_n = 2n+1$ ومنه $(\ln V_n)$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول 1 وعليه :

(0,75)

$S'_n = \frac{n}{2}(1 + 2(n-1) + 1) = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = n^2$

ط2 :

$S'_n = \ln(V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_{n-1}) = \ln(V_0 \times V_0 \times q \times \cdots \times V_0 \times q^{n-1})$

$= \ln(V_0^n \times q^{1+2+\cdots+n-1}) = \ln V_0^n + \ln q^{1+2+\cdots+n-1}$

$S'_n = n \ln V_0 + \frac{n-1}{2}(n) \times \ln q = n + (n-1)n = n(n-1+1) = n^2$

استنتاج بطريقة أخرى أن $U_n = n^2$

لدينا $S'_n = U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + \cdots + U_n - U_{n-1}$

$S'_n = U_n - U_0$

(0,5)

ومنه $U_n = S'_n + U_0 = n^2 + 0 = n^2$

حل التمرين الثالث :

I) تعيين العددين α و β حيث

(0,5)

$$\begin{cases} 2\alpha - \sqrt{3}\beta = 3\sqrt{3} - i & (1) \\ \alpha i - \beta = 0 & (2) \end{cases}$$

لدينا من (2) $\beta = \alpha i$ ومنه (1) تكافئ :

$2\alpha - \sqrt{3}\alpha i = 3\sqrt{3} - i$ أي $\alpha(2 - \sqrt{3}i) = 3\sqrt{3} - i$

ومنه $\alpha = \dfrac{3\sqrt{3} - i}{2 - \sqrt{3}i} = \dfrac{(3\sqrt{3} - i)(2 + \sqrt{3}i)}{7} = \dfrac{6\sqrt{3} + 9i - 2i + \sqrt{3}}{7}$

$\dfrac{7\sqrt{3} + 7i}{7} = \sqrt{3} + i$

ومنه

$\beta = (\sqrt{3} + i)i = -1 + \sqrt{3}i$

وبالتالي $\alpha = \sqrt{3} + i$ $\quad$ $\beta = -1 + \sqrt{3}i$

II) لدينا $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C = -1 + \sqrt{3}i$

(0,75)

1) كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي :

$z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$z_C = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(0,25) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقيا سالبا تماما :

z_A^n حقيقي سالب تماما معناه $\arg(z_A^n) = \pi + 2k\pi$

أي $n\arg(z_A) = \pi(1 + 2k)$ ومنه $n\frac{\pi}{6} = \pi(1 + 2k)$

ومنه $n = 12k + 6$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2) كتابة z_B على الشكل المثلثي والجبري :

(0,25) $z_B = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

(0,25) $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times (\sqrt{3} + i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{3} + i)$

$= (1 + i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

استنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي والجبري نجد :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

أي

(0,25) (0,25)

$$\begin{cases} \cos\frac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

3) أ) تبيان أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

(0,25)

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

(0,5)

تحديد طبيعة المثلث OAC:

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه

$\begin{cases} OC = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وعليه المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين.

(0,25) تعيين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC:

بما أن المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين فإن I منتصف القطعة $[AC]$

وعليه $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + i - 1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول A إلى C مع تحديد عناصره المميزة:

(0,5)

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $z_C - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_O)$

ومنه C صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

(0,25)

جـ) تبيان أن B هي صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$:

B صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ معناه $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OC}}$

لدينا

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i - \sqrt{3} - i = -1 + \sqrt{3}i$

$z_{\overrightarrow{OC}} = z_C - z_O = z_C = -1 + \sqrt{3}i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OC}}$

ومنه B صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$.

(0,25)

استنتاج أن الرباعي $OABC$ مربع:

بما أن $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ و $OC = OA$ و $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}$

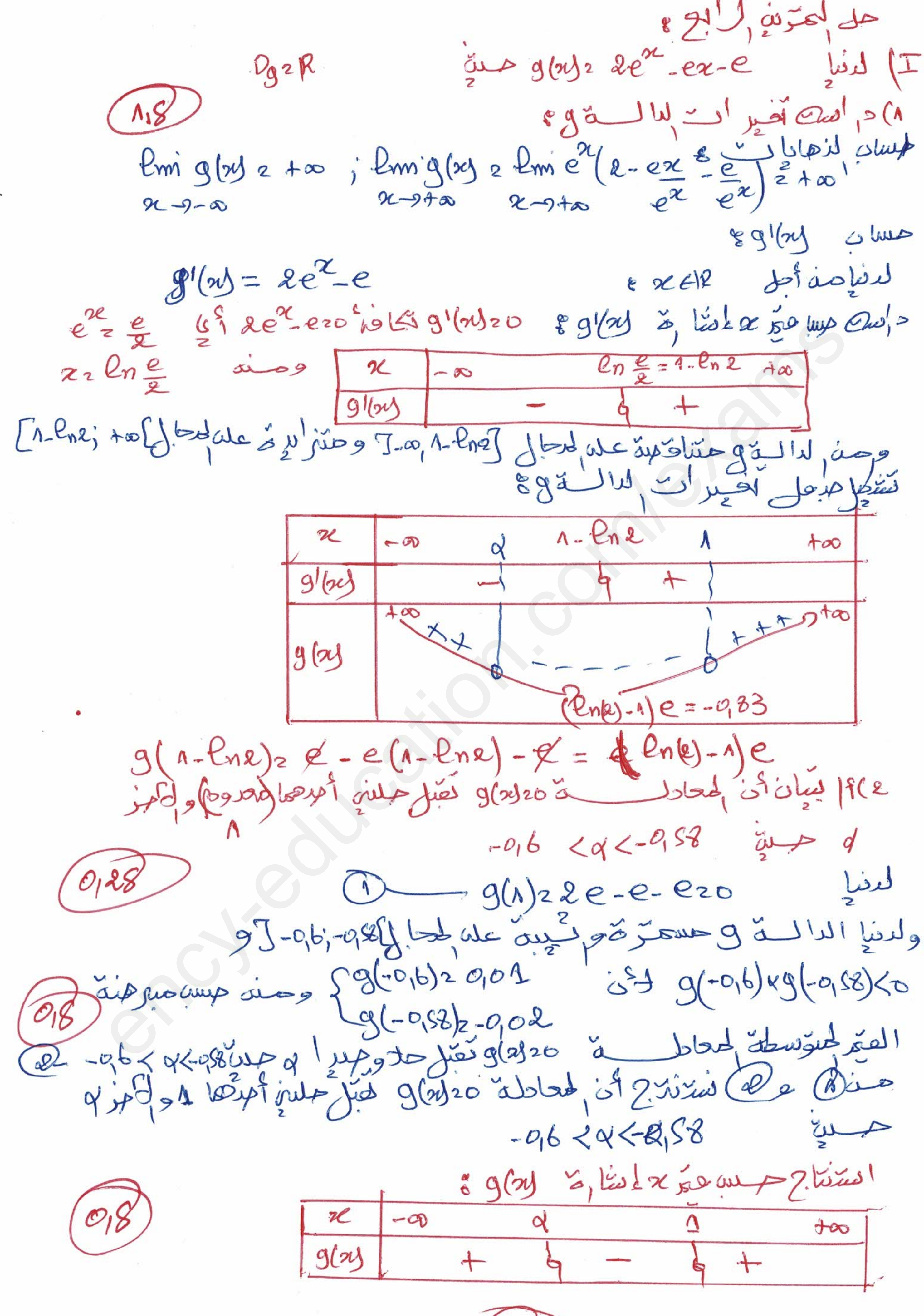
فإن الرباعي $OABC$ مربع.

4) تعيين طبيعة المجموعة (S) الـ ... $\text{Arg}\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$

$\text{Arg}\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = \pi + 2k\pi$ وعليه المجموعة (S)

(0,5)

هي القطعة $[AC]$ ماعدا النقطتين A و C.



حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x)=2e^{x}-ex-e$ حيث $D_g=\mathbb{R}$

(1,5)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(2-\frac{ex}{e^{x}}-\frac{e}{e^{x}}\right)=+\infty$

حساب $g'(x)$:

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=2e^{x}-e$

دراسة حسب قيم x إشارة $g'(x)$: $g'(x)=0$ تكافئ $2e^{x}-e=0$ أي $e^{x}=\frac{e}{2}$

ومنه $x=\ln\frac{e}{2}$

x	$-\infty$		$\ln\frac{e}{2}=1-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty,1-\ln 2]$ ومتزايدة على المجال $[1-\ln 2;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	α	$1-\ln 2$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	$(\ln(2)-1)e=-0,83$	0	↗ $+\infty$

$g(1-\ln 2)=e-e(1-\ln 2)-e=(\ln(2)-1)e$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$

(0,25)

لدينا $g(1)=2e-e-e=0$ ——— (1)

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-0,6;-0,58[$ و $g(-0,6)\times g(-0,58)<0$ لأن $\begin{cases} g(-0,6)=0,01 \\ g(-0,58)=-0,02 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$ (2)

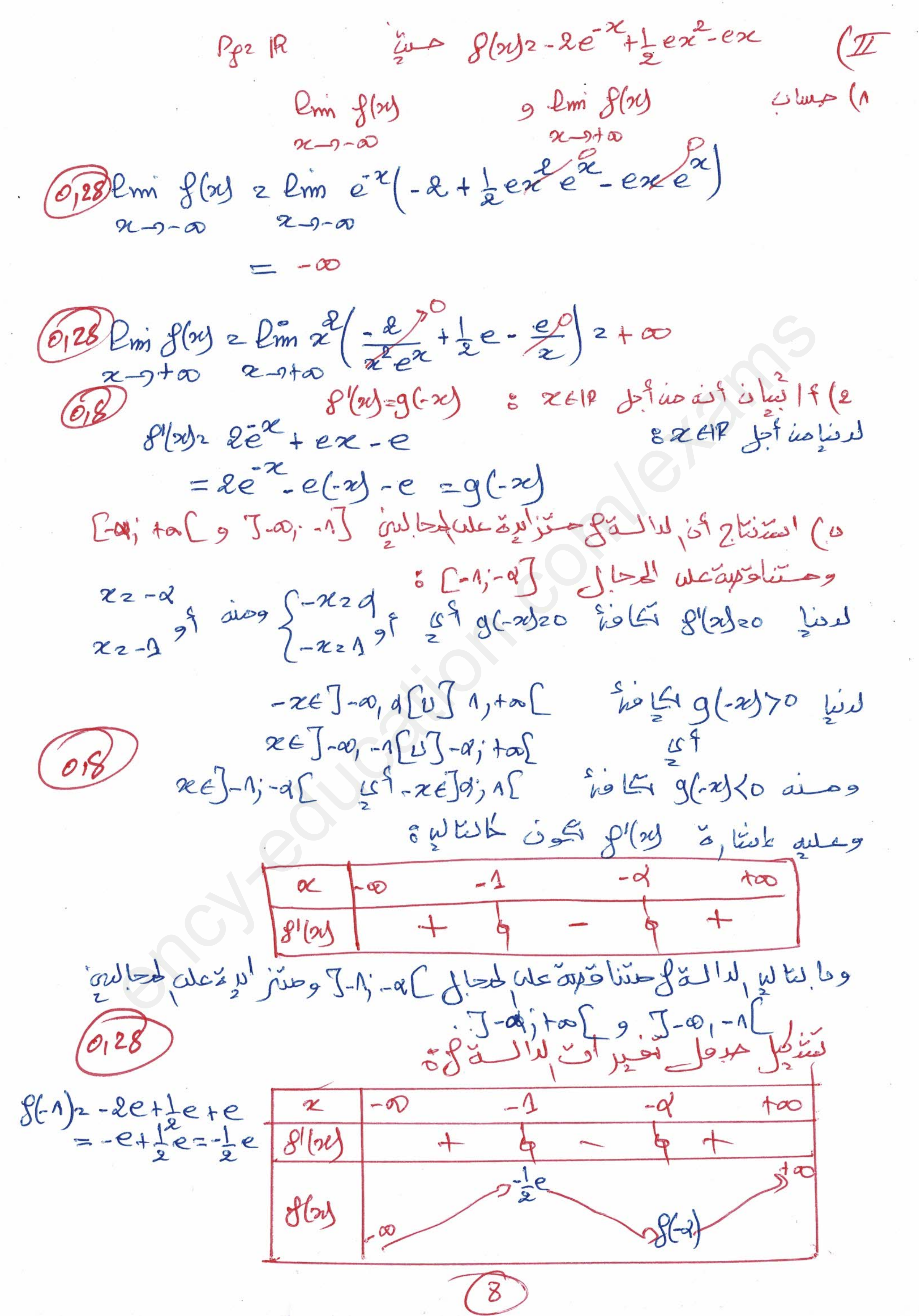
(0,5)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,58$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

(0,5)

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



II) $f(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{2}ex^2 - ex$ حيث $D_f = \mathbb{R}$

1) حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(0,25) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x}\left(-2 + \frac{1}{2}ex^2 e^{x} - exe^{x}\right)$

$= -\infty$

(0,25) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{-2}{x^2 e^x} + \frac{1}{2}e - \frac{e}{x}\right) = +\infty$

2) أ) تبيان أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)$ (0,5)

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 2e^{-x} + ex - e$

$= 2e^{-x} - e(-x) - e = g(-x)$

ب) استنتاج أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-\alpha;+\infty[$

ومتناقصة على المجال $[-1;-\alpha]$:

لدينا $f'(x)=0$ تكافئ $g(-x)=0$ أي $\begin{cases}-x=\alpha \\ -x=1\end{cases}$ أو ومنه $x=-\alpha$ أو $x=-1$

لدينا $g(-x)>0$ تكافئ $-x \in]-\infty,\alpha[\cup]1,+\infty[$

أي $x \in]-\infty,-1[\cup]-\alpha;+\infty[$

(0,5) ومنه $g(-x)<0$ تكافئ $-x \in]\alpha;1[$ أي $x \in]-1;-\alpha[$

وعليه إشارة $f'(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-1;-\alpha[$ ومتزايدة على المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-\alpha;+\infty[$.

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f : (0,25)

$f(-1) = -2e + \frac{1}{2}e + e$
$= -e + \frac{1}{2}e = -\frac{1}{2}e$

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}e$	↘	$f(-\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أحسب دون حساب : $\lim_{x \to -\alpha} \frac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}$

0,25 $\lim_{x \to -\alpha} \frac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha} = f'(-\alpha) = g(\alpha) = 0$

تفسير النتيجة بيانيا :

0,25 نقول أن (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$.

4) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها :

لدينا $f'(x) = g(-x)$ ومنه $f''(x) = -g'(-x)$

لدينا $f''(x) = 0$ تكافئ $g'(-x) = 0$ أي $-x = 1-\ln 2$ أي $x = \ln(2)-1$

لدينا $f''(x) > 0$ تكافئ $-g'(-x) > 0$ أي $g'(-x) < 0$

ومنه $-x \in]-\infty, 1-\ln 2[$ ومنه $x \in]\ln(2)-1; +\infty[$

وعليه اشارة $f''(x)$ تكون كالتالي :

ملغى .

x	$-\infty$		$\ln(2)-1$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن f'' انعدمت من أجل $x = \ln(2)-1$ وغيرت اشارتها فإن النقطة $\Omega(\ln(2)-1; f(\ln(2)-1))$ أي $\Omega\left(\ln(2)-1; \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2\right)$

لأن $f(\ln(2)-1) = -2e^{1-\ln 2} + \frac{1}{2}e(\ln(2)-1)^2 - e(\ln(2)-1)$

$= -e + \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln(2) + e$

$= \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2$

5) $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$ / $D_h = \mathbb{R}$

0,25 أ) حساب : $\lim_{x \to +\infty}[f(x)-h(x)]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)-h(x) = \lim_{x \to +\infty} -2e^{-x} = 0$

تفسير النتيجة بيانيا :

0,25 نقول أن (C_f) و (C_h) متقاربان عند $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h) :

0,25 بما أن $f(x)-h(x) = -2e^{-x} < 0$ فإن (C_f) يقع تحت (C_h) من أجل $x \in \mathbb{R}$

5) أ) حساب $f(0)$ ثم رسم (C_f):

لدينا $f(0) = -2$

0,28

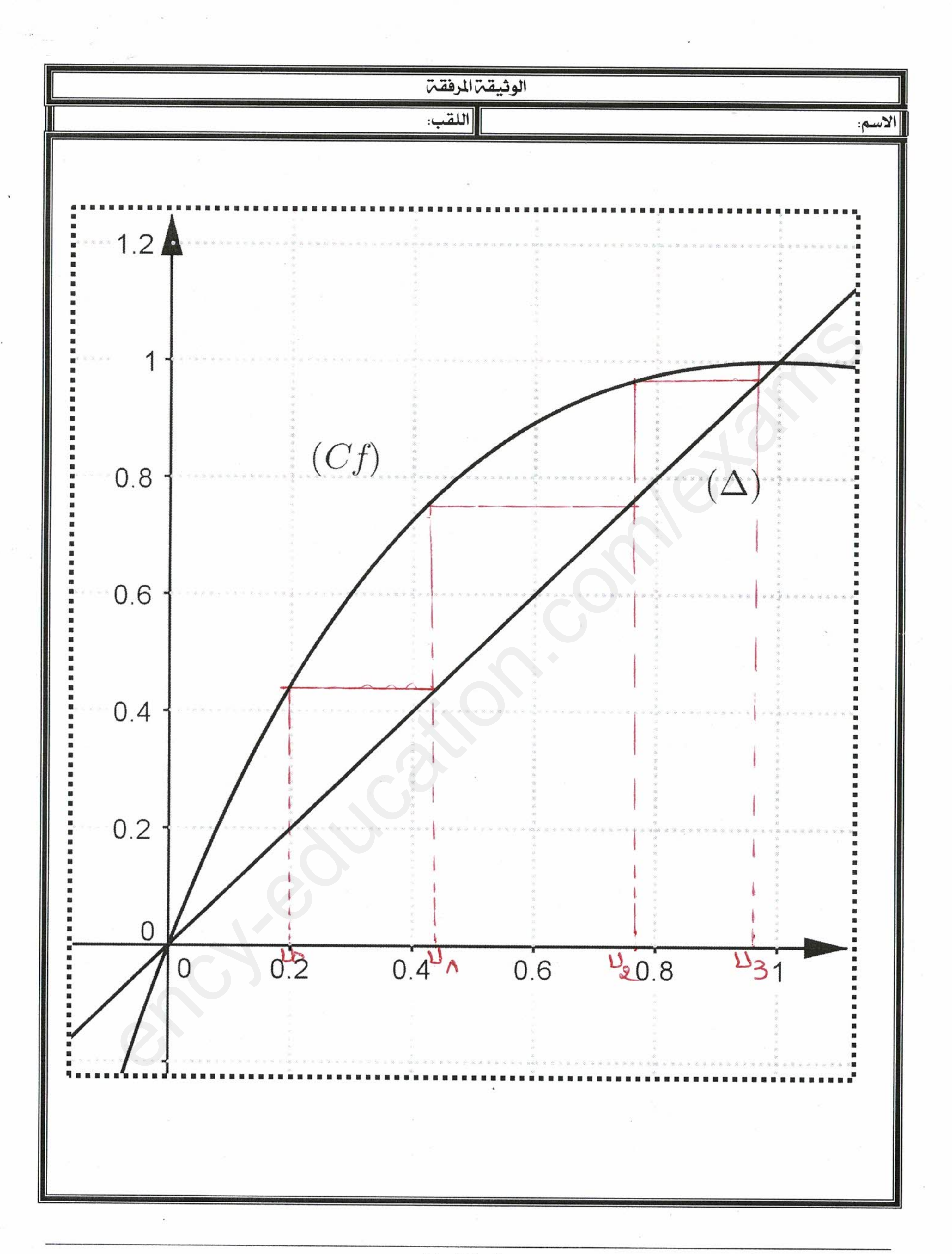
(C_f)

0,8

ب) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = m$ حلين موجبين وحل سالب:

لدينا من أجل $m \in]f(-\alpha) ; -2[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

0,28



الوثيقة المرفقة
الاسم:
اللقب:
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
(Cf)
(Δ)

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبي
الشعبة : تقني رياضي

ثانوية ابن عليوي صالح
دورة ماي 2021

اختبار في مادة الرياضيات

المدة : 04 سا

اختر احد الموضوعين الاتيين

الموضوع الاول

التمرين الأول (4.5 نقاط)

1/ (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول V_0 و أساسها q حيث $\begin{cases}\ln V_0 + \ln V_2 = 2ln2 \\ e^{V_0} \times e^{V_1} = e^6\end{cases}$

ا) احسب V_1 وV_0 ثم استنتج قيمة الأساس q

ب) نضع $V_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$ عبر عن V_n بدلالة n ثم احسب $\lim V_n$

ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \dots\dots\dots + \ln V_n$

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{9U_n + 10}$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq U_n \leq 10$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - U_n)$

د) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 10 - U_n \leq V_n$

ه) استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثاني (4 نقاط)

اختر الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية

1/ - صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية زرقاء جميع الكرات متماثلة .نسحب عشوائيا كرية واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان امله الرياضياتي هو:

ا) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) 1

- نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2 ونسحب كرية من الصندوق U_1 و كرية من الصندوق U_2

فأن قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي

ا) 1 ب) 2 ج) 3

2/ - الشكل الاسي للعدد المركب $Z = -\sin\theta + i\cos\theta$ هو

ا) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ب) $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ج) $e^{i(\pi-\theta)}$

- العدد : $(1+i)^{1442}$ يساوي

ا) 2^{721} ب) $i\,2^{721}$ ج) $2^{721}(1+i)$

التمرين الثالث (4.5 نقاط)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول (x,y) التالية $2021x - 2020y = 5 \quad ....(E)$

ا) بين ان العددين 2020 و 2021 اوليان فيما بينهما و استنتج ان المعادلة (E) تقبل حلولا

ب) بين انه اذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فان $x \equiv 0[5]$

ج) استنتج حلا خاصا (x_0, y_0) حيث $2022 \leq x_0 \leq 2027$ ثم حل المعادلة (E)

2/ عين الاعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv 5\ [2020] \\ a \equiv 0\ [2021] \end{cases}$

3/ ا) ادرس و حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0[9]$

ج) عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث : $5^{y-x} \equiv 8[9]$

التمرين الرابع (7 نقاط)

I- g الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - (2x+1)lnx$

1/ ا) احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g'

ب) بين انه من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ $g'(x) < 0$

ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و 0 ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.83 < \alpha < 1.84$

3/ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- f الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o.\vec{i}\,;\vec{j})$ وحدة الطول

(على محور الفواصل $1cm$ و على محور التراتيب $4cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا

2/ ا) بين انه من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3/ بين ان $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4/ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5/ أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f)

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

7/ نعتبر الدالة h المعرفة على $]0\,,+\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

ادرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها

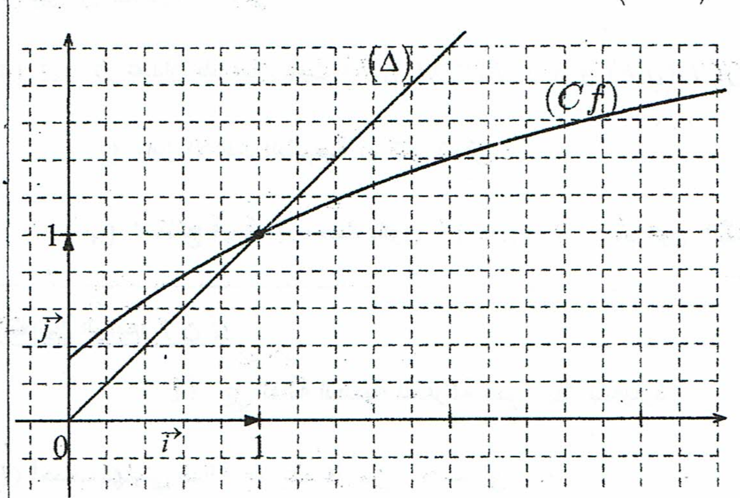
انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن):

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.



α عدد حقيقي موجب . (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0

حيث $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

II) نضع في كل ما يلي $\alpha=0$

1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

ب) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+\dots\dots+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

5) احسب بدلالة n المجموع T حيث: $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+\dots\dots+\ln(|v_{n+2019}|)$

التمرين الثاني(4 ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

5 كريات حمراء مرقمة كما يلي: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 كريات خضراء مرقمة كما يلي : 0 ، 0 ، 1 ، 2 ، 2

نسحب عشوائيا من الكيس 4 كريات في آن واحد

1) أحسب احتمال كلا من الأحداث التالية :

A : الحصول على 4 كريات من نفس اللون

B : الحصول على 4 كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020

C : الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر من بين الأرقام الأربعة

أ) عين قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون احتماله

ب) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

ج) احسب احتمال الحدث : $|X-1|=1$

التمرين الثالث(4,5 ن):

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5

3) بين أن العدد 131 أولي

4) a و b عددان طبيعيان حيث $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$

ب) استنتج قيمة n بحيث يكون $7<n<15$ ؛ ثم عين الثنائيات (a,b)

التمرين الرابع(7 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$

1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x+3-xe^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أ - بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)

3) أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

4) أ - بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما على الترتيب α و β حيث:

$-3,05<\alpha<-3$ و $0,75<\beta<0,8$

ب- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج- أنشئ (T) ؛ (Δ) و (C_f)

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=x+m$

6) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب- أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة الدالة h')

تصحيح باك تجريبي 2021 رياضيات 3 ع ت م - 1

التمرين الأول (04 ن)

1) (V_n) هندسية حدودها موجبة ... حساب V_0 ، V_1 ، q

$\ln V_0 + \ln V_2 = 2\ln 2$ ، $e^{V_0} \times e^{V_1} = e^6$

حساب V_0 ، V_1 ، q

$V_1^2 = 4$ ... ومنه $V_1 = 2$

$V_0 + V_1 = 6$ ومنه $V_0 = 4$

$q = \frac{V_1}{V_0} = \frac{1}{2}$

ب) $V_n = V_0 q^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ لأن $-1 < \frac12 < 1$

ج) $S_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \dots + \ln V_n$

$\ln V_n = (-\ln 2)n + \ln 4$

نضع $W_n = (-\ln 2)n + \ln 4$ حسابية أساسها $r = -\ln 2$ و $W_0 = \ln 4$

$S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

$= \frac{n+1}{2}\left[(-\ln 2)n + 2\ln 4\right]$

2) $U_{n+1} = \sqrt{9U_n + 10}$ ، $U_0 = 6$

أ) البرهان بالتراجع $6 \le U_n \le 10$

$6 \le U_0 \le 10$ ، $U_0 = 6$ محققة ، $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$: $6 \le U_n \le 10$ ونبرهن صحة $P(n+1)$: $6 \le U_{n+1} \le 10$

$54 \le 9U_n \le 90$ ومنه $6 \le U_n \le 10$

$64 \le 9U_n + 10 \le 100$ ومنه

$6 \le 8$ ، $8 \le \sqrt{9U_n+10} \le 10$

$6 \le U_{n+1} \le 10$

$6 \le U_n \le 10$ مهما كان n من $\mathbb{N}$

محدودة (U_n)

ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 9U_n + 10}{\sqrt{9U_n+10} + U_n}$

$-x^2 + 9x + 10 = 0$ ← $x = U_n$

$x_2 = 10$ ، $x_1 = -1$

U_n	$-\infty$	-1	6	10	$+\infty$
$-U_n^2+9U_n+10$			+		

ومنه (U_n) متزايدة تماما ، $U_{n+1} - U_n > 0$

* (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 10 فهي متقاربة

ج) $10 - U_{n+1} \le \frac12(10 - U_n)$

$10 - U_{n+1} = \frac{9}{10 + \sqrt{9U_n+10}}(10 - U_n)$

$64 \le 9U_n + 10 \le 100$ ومنه $6 \le U_n \le 10$

$8 \le \sqrt{9U_n+10} \le 10$ ومنه

$18 \le 10 + \sqrt{9U_n+10}$ أي $18 \le \sqrt{9U_n+10}$

$\frac{1}{18} \ge \frac{1}{10+\sqrt{9U_n+10}}$ أي

$\frac{9}{18} \ge \frac{9}{10+\sqrt{9U_n+10}}$

$\frac{9}{10+\sqrt{9U_n+10}} \le \frac12$

$\frac{9}{10+\sqrt{9U_n+10}}(10 - U_n) \le \frac12(10 - U_n)$

$10 - U_{n+1} \le \frac12(10 - U_n)$

د) $0 \le 10 - U_n \le V_n$

$0 \le 10 - U_n$ محققة لأن $U_n \le 10$

? $10 - U_n \le V_n$

$10 - U_1 \le \frac12(10 - U_0)$

$10 - U_2 \le \frac12(10 - U_1)$

$\vdots$

$10 - U_n \le \frac12(10 - U_{n-1})$

$(10-U_1)(10-U_2)\dots(10-U_n) \le \left(\frac12\right)^n (10-U_0)(10-U_1)\dots(10-U_{n-1})$

$10 - U_n \le \left(\frac12\right)^n 4$

$10 - U_n \le V_n$

ومنه $0 \le 10 - U_n \le V_n$

هـ) $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ حسب مبرهنة الحصر

$\lim_{n\to+\infty}(10 - U_n) = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} U_n = 10$

التمرين الثاني (04 ن)

1) U_1 ← 5 حمراء و 4 سوداء ، 6

U_2 ← 6 حمراء و 1 ، 3 سوداء

نسحب كرة من U_1 ثم كرتين من U_2

عدد الحالات الممكنة $C_{10}^1 \times C_4^2 = 40$

X يرمز لعدد الكرات الحمراء المسحوبة

القيم الممكنة لـ X هي $\{1, 0\}$

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	24/40	16/40

$P(X=0) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{40} = \frac{24}{40}$

$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_4^2}{40} = \frac{16}{40}$

$E(X) = 0 \times \frac{24}{40} + 1 \times \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

2) نضيف n كرة سوداء لـ U_1 فيصبح

6 حمراء و $n+4$ سوداء

n حمراء ، 1 ... $n+3$

نسحب كرة من U_1 ... ثم من U_2

عدد الحالات الممكنة $C_{n+10}^1 \times C_{n+4}^1 = (n+10)(n+4)$

$= n^2 + 14n + 40$

A : الكرتين المسحوبتين لهما نفس اللون

$P(A) = \frac{C_6^1 C_1^1 + C_{n+4}^1 C_{n+3}^1 + C_n^1 C_{n+4}^1}{n^2+14n+40}$

$= \frac{6 + (n+4)(n+3) + n + 4}{n^2+14n+40}$

$= \frac{n^2 + 8n + 22}{n^2 + 14n + 40}$

$\frac{n^2+8n+22}{n^2+14n+40} = \frac{7}{12}$ لأن $P(A) = \frac{7}{12}$

$5n^2 - 2n - 16 = 0$

$\Delta = 324$ ، $n = -\frac{8}{5}$ ، $n = 2$

ب) شكل $Z = \sin\theta + i\cos\theta$

نكتب على الشكل الأسي

$Z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ، $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ج) $(1+i)^{1442} = i\,2^{721}$

$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$(1+i)^{1442} = (\sqrt{2})^{1442}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1442}$

$(1+i)^{1442} = 2^{721}\left(e^{i\frac{1442\pi}{4}}\right)$

$= 2^{721}\left(\cos\left(360\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(360\pi + \frac{\pi}{2}\right) i\right)$

$= 2^{721}(0 + i) = i\,2^{721}$

التمرين 3 (4 ن)

1) (E) : $2021x - 2020y = 5$

2) $2020 = 2^2 \times 5 \times 101$

$2021 = 43 \times 47$

$PGCD(2020, 2021) = 1$

إذن 2020 ، 2021 أوليان فيما بينهما

* بما أن 1 يقسم 5 فإن (E) تقبل حلولا

ب) (x, y) حل لـ (E) أي $2021x - 2020y = 5$

ومنه $2021x = 2020y + 5$

$2021x = 5[404y + 1]$

أي $2021x \equiv 0\,[5]$ ، 2021 أولي مع 5

ومنه $x \equiv 0\,[5]$

ج) (x_0, y_0) حل خاص لـ (E) حيث

$2022 \le x_0 \le 2027$

$x \equiv 0\,[5]$ يعني $x = 5K$

ومنه $2022 \le 5K \le 2027$

أي $404{,}4 \le K \le 405{,}4$ ، $K = 405$

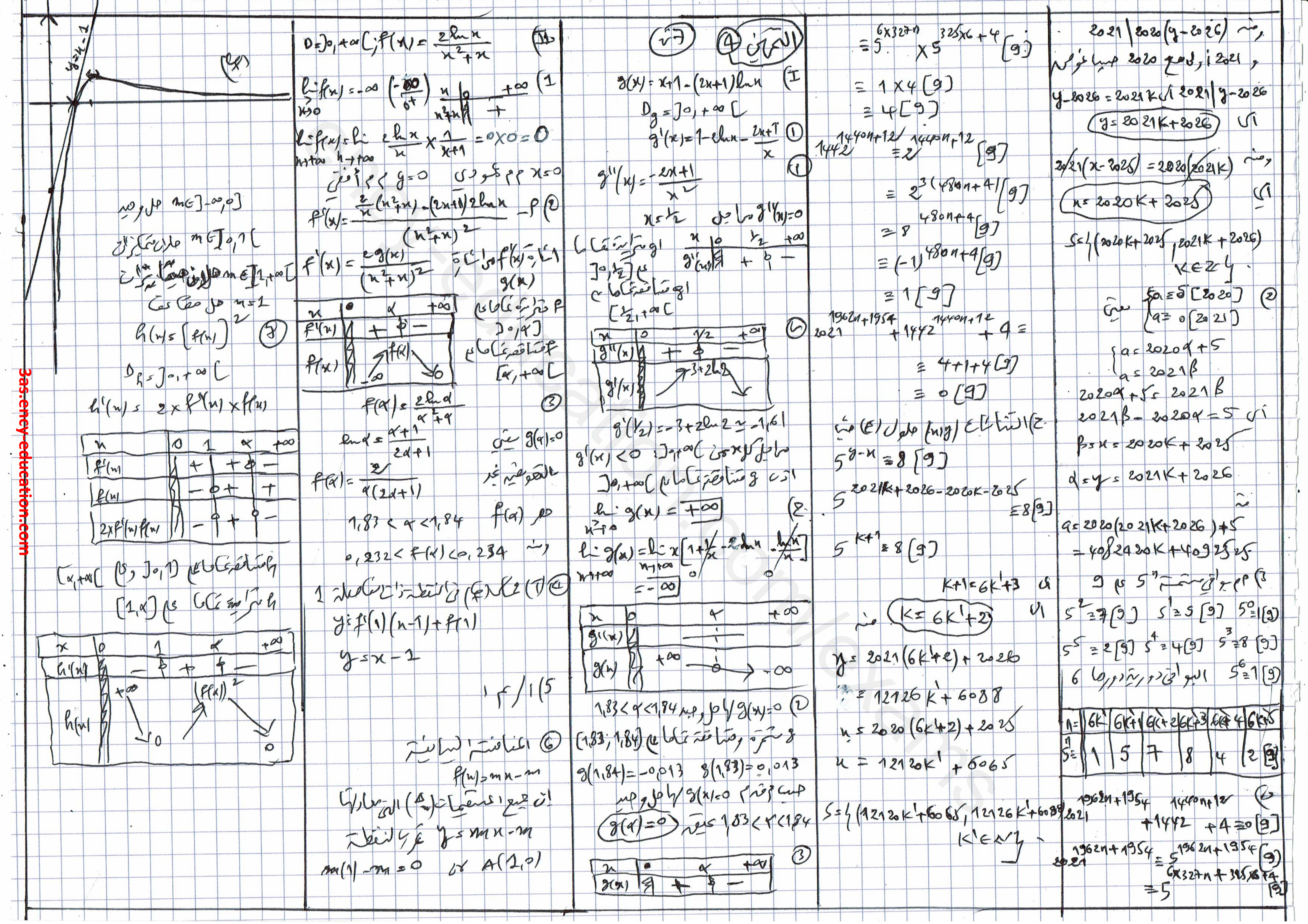
ومنه $x_0 = 2025$ ، $2021(2025) - 2020y_0 = 5$

نجد $y_0 = 2026$ ، حل المعادلة

$\begin{cases} 2021x - 2020y = 5 \\ 2021(2025) - 2020(2026) = 5 \end{cases}$ ومنه نجد

$2021(x - 2025) =$

$= 2020(y - 2026)$



$2021 \mid 2020(y-2026)$ ومنه
و 2021 أولي مع 2020 حسب غوص
$y-2026 = 2021k$ أي $2021 \mid y-2026$
$y = 2021k + 2026$ أي

ومنه $2021(x-2025) = 2020(2021k)$
$x = 2020k + 2025$ أي

$S = \{(2020k+2025,\ 2021k+2026)\},\ k \in \mathbb{Z}$

② نعين $\begin{cases} a \equiv 5\ [2020] \\ a \equiv 0\ [2021] \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2020\alpha + 5 \\ a = 2021\beta \end{cases}$

$2020\alpha + 5 = 2021\beta$
$2021\beta - 2020\alpha = 5$ أي
$\beta = x = 2020k + 2025$
$\alpha = y = 2021k + 2026$
ومنه
$a = 2020(2021k + 2026) + 5$
$= 4082420k + 4092525$

③ دراسة بواقي قسمة 5^n على 9

$5^0 \equiv 1[9]$ $5^1 \equiv 5[9]$ $5^2 \equiv 7[9]$
$5^3 \equiv 8[9]$ $5^4 \equiv 4[9]$ $5^5 \equiv 2[9]$
$5^6 \equiv 1[9]$ البواقي دورية دورها 6

$n=$	$6k'$	$6k'+1$	$6k'+2$	$6k'+3$	$6k'+4$	$6k'+5$
$5^n \equiv$	1	5	7	8	4	2 [9]

④ $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0[9]$

$2021^{1962n+1954} \equiv 5^{1962n+1954}[9]$
$\equiv 5^{6\times327n + 325\times6+4}[9]$
$\equiv 5^{6\times327n} \times 5^{325\times6+4}[9]$
$\equiv 1 \times 4[9]$
$\equiv 4[9]$

$1442^{1440n+12} \equiv 2^{1440n+12}[9]$
$\equiv 2^{3(480n+4)}[9]$
$\equiv 8^{480n+4}[9]$
$\equiv (-1)^{480n+4}[9]$
$\equiv 1[9]$

$2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv$
$\equiv 4+1+4[9]$
$\equiv 0[9]$

⑤ تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول (E) حيث
$5^{y-x} \equiv 8[9]$
$5^{2021k+2026-2020k-2025} \equiv 8[9]$
$5^{k+1} \equiv 8[9]$
أي $k+1 = 6k'+3$
ومنه $k = 6k'+2$

$y = 2021(6k'+2) + 2026$
$= 12126k' + 6068$
$x = 2020(6k'+2) + 2025$
$x = 12120k' + 6065$

$S = \{(12120k'+6065,\ 12126k'+6068)\},\ k' \in \mathbb{N}$

التمرين 4 (الحل)

I) $g(x) = x + 1 - (2x+1)\ln x$

$D_g =]0,+\infty[$

① $g'(x) = 1 - 2\ln x - \dfrac{2x+1}{x}$

$g''(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2}$ ①

$g''(x) = 0$ معناه $x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

g' متزايدة تماما على $]0,\frac{1}{2}]$ و متناقصة تماما على $[\frac{1}{2},+\infty[$

ب)

x	0		$1/2$		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	↗	$-3+2\ln 2$	↘	

$g'(\frac{1}{2}) = -3 + 2\ln 2 \simeq -1{,}61$

$g'(x) < 0$ على $]0,+\infty[$ أي
أن g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1 + \frac{1}{x} - 2\ln x - \frac{\ln x}{x}\right] = -\infty$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$-$		
$g(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘	$-\infty$

② $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$
و g مستمرة ومتناقصة تماما على $[1{,}83;1{,}84]$
$g(1{,}84) = -0{,}013$ $g(1{,}83) = 0{,}013$
حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا
$g(\alpha) = 0$ حيث $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$

③

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II) $D =]0,+\infty[$; $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)$

x	0		$+\infty$
x^2+x	‖	$+$	

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x+1} = 0 \times 0 = 0$

ومنه $y = 0$ مقارب أفقي و $x = 0$ مقارب عمودي

② $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}(x^2+x) - (2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘	0

f متزايدة تماما على $]0,\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha,+\infty[$

③ $f(\alpha) = \dfrac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$

$g(\alpha) = 0$ يعني $\ln\alpha = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$

$f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

حصر $f(\alpha)$: $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$
ومنه $0{,}232 < f(\alpha) < 0{,}234$

④ (T) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$y = x - 1$

⑤ $(1;1)$

⑥ المناقشة البيانية
$f(x) = mx - m$
تقاطع (C_f) مع (Δ_m) المستقيمات
ذات المعادلة $y = mx - m$
$m(1) - m = 0$ و $A(1,0)$

لما $m \in]-\infty,0]$ حل وحيد
لما $m \in]0,1[$ حلان متمايزان
لما $m \in]1,+\infty[$ حلان
لما $m = 1$ حل مضاعف

⑦ $h(x) = [f(x)]^2$

$D_h =]0,+\infty[$

$h'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2f'(x)f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

h متناقصة تماما على $]0,1]$ و $[\alpha,+\infty[$
h متزايدة تماما على $[1,\alpha]$

x	0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$(f(\alpha))^2$	↘	0

تصحيح الموضوع 2 - باكالوريا تجريبي

ش: رياضيات تقني رياضي - 2021 -

التمرين الأول (4,5 ن)

$f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ $\quad D=[0,+\infty[$

I) أ) (u_n) ثابتة يعني: $u_{n+1}=u_n$

نضع $u_0=\alpha$ ، $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$

ومنه $\alpha=\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}$ أي $\alpha^2=1$

ومنه $\alpha=1$ لأن $\alpha\geq 0$

II) أ) $u_0=0$ ، $u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$

$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$

ب) (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 1

2) أ- من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n<1$

من أجل $n=0$: $u_0=0$ ، $0\leq u_0<1$

$P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة: $0\leq u_n<1$

$P(n+1)$ صحيحة: $0\leq u_{n+1}<1$ ؟

$0\leq u_n<1$ و f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ومنه $f(0)\leq f(u_n)<f(1)$

أي $\frac{1}{3}\leq u_{n+1}<1$ و $0\leq\frac{1}{3}$

ومنه $0\leq u_{n+1}<1$

من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n<1$

(u_n) محدودة

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\frac{1-u_n^2}{u_n+3}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$

لدينا $0\leq u_n<1$ ومنه

$0<1-u_n\leq 1$ / $1\leq u_n+1<2$ / $3\leq u_n+3<4$

$u_{n+1}-u_n>0$ و (u_n) متزايدة تماما

ج) (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة

3) $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) (v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{2u_n-2}{4u_n+2}$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\frac{1}{2}v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=-1$

ب) $v_n=v_0q^n=-1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ أي $v_nu_n+v_n=u_n-1$

ومنه $u_n(v_n-1)=-v_n-1$ ومنه $u_n=\frac{-v_n-1}{v_n-1}$

$u_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{-1}{-1}=1$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ، $-1<\frac{1}{2}<1$

4) $S_n=1+\frac{v_{2021}}{v_{2020}}+\frac{v_{2022}}{v_{2020}}+\dots+\frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\frac{v_{2020}+v_{2021}+v_{2022}+\dots+v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\frac{1}{v_{2020}}\left[v_{2020}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right)\right]$

$=-2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$T_n=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+\dots+\ln(|v_{n+2019}|)$

لدينا $\ln(|v_n|)=\ln\left(\left|-1\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|\right)=\ln\left(\left|-1\right|\left|\frac{1}{2}\right|^n\right)$

$\ln(|v_n|)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-n\ln 2$

نضع $w_n=(-\ln 2)n$ إذن (w_n) متتالية حسابية

أساسها $r=-\ln 2$ وحدها الأول $w_0=0$

$T_n=w_n+w_{n+1}+\dots+w_{n+2019}$ / عدد الحدود 2020

$=\frac{2020}{2}\left[w_n+w_{n+2019}\right]$

$=1010\left[(-\ln 2)n+(-\ln 2)(n+2019)\right]$

$T_n=1010\left[(-2\ln 2)n+(-\ln 2)(2019)\right]$

التمرين 2 (4 ن)

10 كرات: 5 حمراء ← 2, 2, 1, 1, 0 / 5 خضراء ← 2, 2, 1, 0, 0

نسحب 4 كرات في آن واحد

عدد الحالات $C_{10}^4=210$

1) A: 4 كرات من نفس اللون

$P(A)=\frac{C_5^4+C_5^4}{210}=\frac{1}{21}$

B: 4 كرات جداء أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020

$P(B)=\frac{C_3^2\times C_4^2}{210}=\frac{18}{210}=\frac{3}{35}$

C: 4 كرات مجموع أرقامها يساوي 4

$0+1+1+2=4$ / $0+0+2+2=4$

$P(C)=\frac{C_3^2\times C_4^2+C_3^1\times C_3^2\times C_4^1}{210}=\frac{9}{35}$

2) X يرفق بكل سحب 4 كرات الرقم الأكبر.

قيم X هي: 1 أو 2

يكون 1 هو الرقم الأكبر لما نسحب 4 أرقام من بين

1, 1, 1, 0, 0, 0

$P(X=1)=\frac{C_6^4}{210}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$

ومنه $P(X=2)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	1/14	13/14

ب) الأمل

$E(X)=\sum_{i=1}^{2}p_ix_i$

$=\frac{1}{14}+\frac{26}{14}=\frac{27}{14}$

ج) $|X-1|=1$ يعني $X-1=1$ أو $X-1=-1$

منه $X=2$ أو $X=0$ مرفوض

$P(|X-1|=1)=P(X=2)=\frac{13}{14}$

التمرين 3 (4,5 ن)

1) بواقي قسمة 2^n على 5

$2^3\equiv 3[5]$ / $2^2\equiv 4[5]$ / $2^1\equiv 2[5]$ / $2^0\equiv 1[5]$

$2^4\equiv 1[5]$ البواقي دورية ودورها 4

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^n\equiv$	1	2	4	3	[5]

2) باقي قسمة $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5

$2014\equiv 4[5]$ ومنه $2014\equiv 2^2[5]$ إذن

$2014^{2n+1}\equiv(2^2)^{2n+1}[5]$ إذن $2014^{2n+1}\equiv 2^{4n+2}[5]$

$\equiv 4[5]$

$2016\equiv 1[5]$ ومنه $2016^{8n}\equiv 1[5]$ ومنه $2\times 2016^{8n}\equiv 2[5]$

$2017\equiv 2[5]$ ومنه $2017^{4n+3}\equiv 2^{4n+3}[5]$ ومنه $2017^{4n+3}\equiv 3[5]$

إذن $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 4-2+3[5]$

$\equiv 0[5]$

الباقي هو: 0

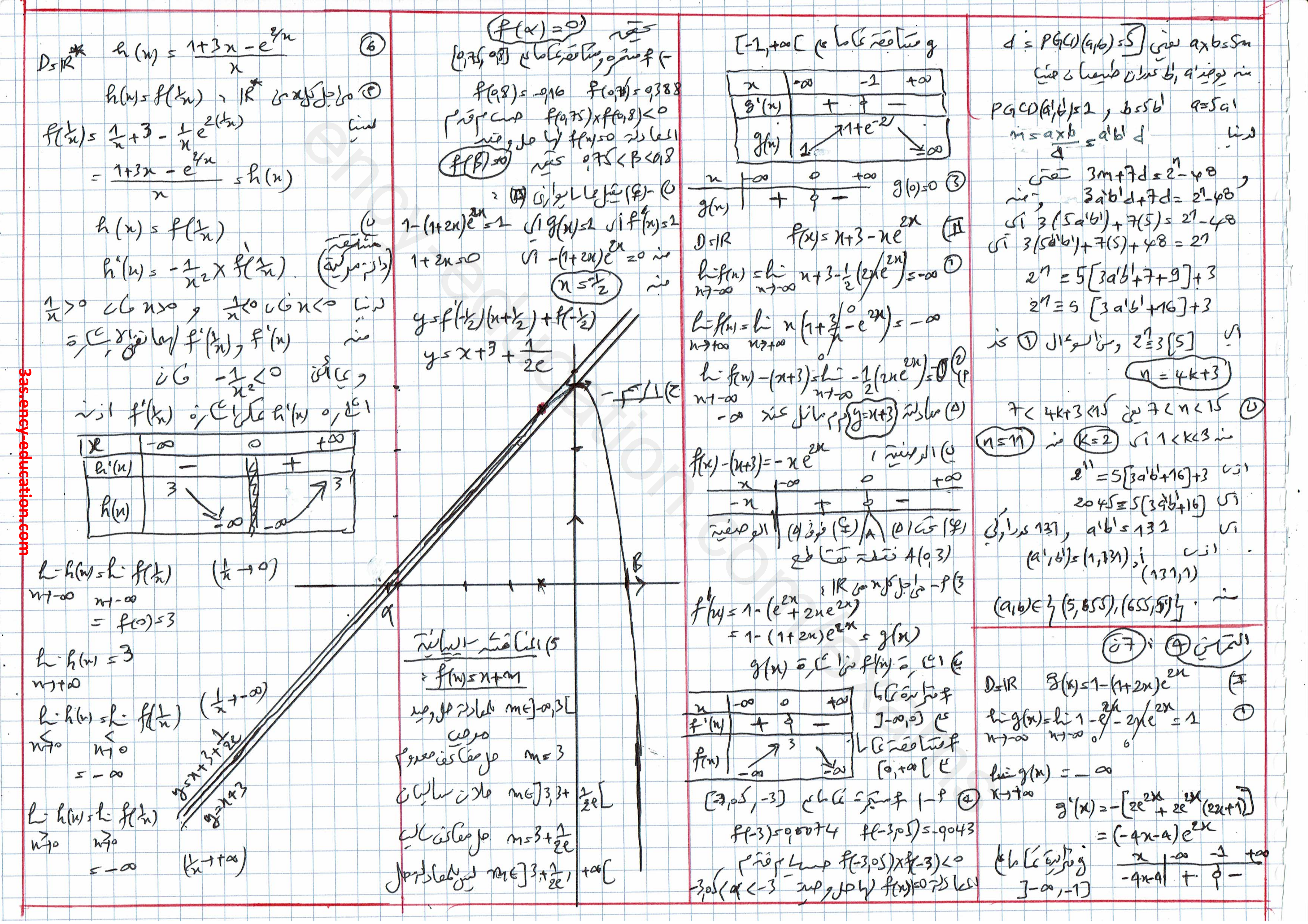
3) $\sqrt{131}\simeq 11,44$

131 لا يقبل القسمة على كل من 2, 3, 5, 7, 11

ومنه 131 عدد أولي

4) $d=PGCD(a,b)$ ، $m=PPCM(a,b)$

أ) $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$



$d = PGCD(a,b) = 5$ يعني $a \times b = 5m$

منه يوجد a', b' عددان طبيعيان حيث

$PGCD(a',b') = 1$, $b = 5b'$, $a = 5a'$

لدينا $m = \frac{a \times b}{d} = a'b'd$

تصبح $3m + 7d = 2^n - 48$

ومنه $3a'b'd + 7d = 2^n - 48$

أي $3(5a'b') + 7(5) = 2^n - 48$

أي $3(5a'b') + 7(5) + 48 = 2^n$

$2^n = 5[3a'b' + 7 + 9] + 3$

$2^n \equiv 5[3a'b' + 16] + 3$

أي $2^n \equiv 3[5]$ وحسب السؤال ① نجد

$n = 4k + 3$

② $7 < 4k+3 < 15$ يعني $7 < n < 15$

أي $1 < k < 3$ منه $k = 2$ منه $n = 11$

أي $2^{11} = 5[3a'b' + 16] + 3$

أي $2045 = 5[3a'b' + 16]$

أي $a'b' = 131$, 131 عدد أولي

إذن $(a',b') = (1,131)$ أو $(131,1)$

منه $(a,b) \in \{(5,655),(655,5)\}$

التمرين ④ (07ن)

I) $D = \mathbb{R}$ $g(x) = 1 - (1+2x)e^{2x}$

① $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - e^{2x} - 2xe^{2x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -[2e^{2x} + 2e^{2x}(2x+1)]$

$= (-4x-4)e^{2x}$

وإشارتها

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-4x-4$	+	0	−

$]-\infty,-1]$

g متزايدة تماما على $]-\infty,-1]$ ومتناقصة تماما على $[-1,+\infty[$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	1 ↗	$1+e^{-2}$	↘ $-\infty$

③ $g(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−

II) $D = \mathbb{R}$ $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 3 - \frac{1}{2}(2xe^{2x}) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}\right) = -\infty$

②أ) $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}(2xe^{2x}) = 0$

ب) معادلة المستقيم المقارب المائل عند $-\infty$ هي $y = x + 3$

ج) الوضعية النسبية:

$f(x) - (x+3) = -xe^{2x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	−
الوضعية	(C) فوق (Δ)	A	(C) تحت (Δ)

نقطة تقاطع $A(0;3)$

③- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 1 - (e^{2x} + 2xe^{2x})$

$= 1 - (1+2x)e^{2x} = g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ $-\infty$

f متزايدة تماما على $]-\infty,0]$ ومتناقصة تماما على $[0,+\infty[$

④ f مستمرة ورتيبة تماما على $[-3{,}05; -3]$

$f(-3) = 0{,}0074$ $f(-3{,}05) = -0{,}043$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(-3{,}05) \times f(-3) < 0$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3{,}05 < \alpha < -3$

$[0{,}75; 0{,}8]$ f مستمرة ورتيبة تماما على

$f(0{,}8) = -0{,}16$ $f(0{,}75) = 0{,}388$

$f(0{,}75) \times f(0{,}8) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0{,}75 < \beta < 0{,}8$

ومنه $f(\beta) = 0$ تحقق $f(\alpha) = 0$

④- (T) مماس يوازي (Δ):

$f'(x) = 1$ أي $g(x) = 1$ أي $1 - (1+2x)e^{2x} = 1$

منه $-(1+2x)e^{2x} = 0$ أي $1 + 2x = 0$

منه $x = -\frac{1}{2}$

$y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$y = x + 3 + \frac{1}{2e}$

(T) $y = x + 3 + \frac{1}{2e}$ ، $y = x + 3$ ، α ، β

5) المناقشة البيانية:

$f(x) = x + m$

$m \in]-\infty,3[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

$m = 3$ حل معدوم

$m \in]3, 3 + \frac{1}{2e}[$ حلان سالبان

$m = 3 + \frac{1}{2e}$ حل مضاعف سالب

$m \in]3 + \frac{1}{2e}, +\infty[$ ليس للمعادلة حلول

⑥ $D = \mathbb{R}^*$ $h(x) = \frac{1 + 3x - e^{2/x}}{x}$

①أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 3 - \frac{1}{x}e^{2\left(\frac{1}{x}\right)}$

$= \frac{1 + 3x - e^{2/x}}{x} = h(x)$

ب) $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

مشتقة دالة مركبة: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا $\frac{1}{x} > 0$ لما $x > 0$ و $\frac{1}{x} < 0$ لما $x < 0$

منه $h'(x)$ و $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ لهما نفس الإشارة

وبما أن $-\frac{1}{x^2} < 0$ فإن $h'(x)$ و $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ إشارتهما متعاكستان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	−	‖	+
$h(x)$	3 ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 3

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\left(\frac{1}{x} \to 0\right)$

$= f(0) = 3$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 3$

$\lim_{x \to 0^<} h(x) = \lim_{x \to 0^<} f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\left(\frac{1}{x} \to -\infty\right)$

$= -\infty$

$\lim_{x \to 0^>} h(x) = \lim_{x \to 0^>} f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\left(\frac{1}{x} \to +\infty\right)$

$= -\infty$